УДК: 531.3, 539.18; 539.183; 530.145; 530.10

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ И ЗАДАЧИ ТРАЕКТОРНО-ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

Валишин Наиль Талгатович
кандидат физико-математических наук

Сафин Айназ Альфредович
студент

Нагорнова Дарья Владимировна
студент

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева, Казань

author@apriori-journal.ru

Аннотация. На базе локального вариационного принципа (ЛВП) осуществляется новая постановка прямой и обратной задачи динамики. Проводится оптико-механическая аналогия, которая получает новое продолжение по сравнению с оптико-механическими аналогиями Луи де Бройля, Шредингера, Четаева. Рассматривается линейный гармонический осциллятор, получены его энергетические уровни, которые согласуются с классическими результатами квантовой физики.

Ключевые слова: локальный вариационный принцип, траекторное движение, волновое движение, волновая функция, оптико-механическая аналогия, гармонический осциллятор.

OPTICAL MECHANICAL ANALOGY AND TRIPLE-WAVE DYNAMICS PROBLEMS

Valishin Nail Talgatovich
candidate of physical and mathematical sciences

Safin Ainaz Alfredovich
student

Nagornova Daria Vladimirovna
student

Kazan National Research Technical
University named after A.N. Tupolev, Kazan

Abstract. The formulation of the inverse and direct dynamics problems is carried out, this formulation is based on local vibrational principle (LVP). Carried out an optical-mechanical analogy, this analogy gets new continuation as opposed to the optical-mechanical analogies of Louis de Broglie, A. Schrodinger and N. Chetaev. The linear harmonic oscillator is regarded, its energy states are obtained, and results are consistent with the classical results of quantum physics.

Key words: local variation principle, triple movement, wave flow, wave function, optical-mechanical analogy, harmonic oscillator.

1. Локальный вариационный принцип (ЛВП).

Введем $x(t)=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ – вектор фазовых координат, $x \in R^n$, где R^n – *n*-мерное евклидово пространство и время $t \in T$ где *T* – интервал времени. Рассмотрим некоторую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

Будем говорить, что уравнения (1), описывающие движение объекта по траектории, определяют состояние исследуемого объекта.

Теперь введем некоторую функцию *V = V(x,t)* ($x \in R^n, t \in T$), которую будем называть волновой функцией или V-функцией и ее быстроту (скорость) изменения

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}^T f \tag{2}$$

в силу системы (1).

Рассмотрим изохронную вариацию быстроты изменения волновой функции

$$\delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = \delta\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \delta\left(\frac{\partial V}{\partial x}^T f\right)$$

где

$$\delta\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta V)$$

$$\delta\left(\frac{\partial V}{\partial x}^T f\right) = \frac{\partial \delta V}{\partial x}^T f + \frac{\partial V}{\partial x}^T \delta f$$

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x}^T \delta x; \quad \delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x$$

При вариации быстроты изменения волновой функции объект из некоторого состояния переходит в новое состояние. Такой переход назовем волновым переходом объекта в новое состояние. Величину δV назовем возможным волновым переходом из исходного состояния в новое состояние. В то время как δx определяет траекторные вариации.

Сформулируем теперь локальный вариационный принцип (ЛВП) [1-3]:

Из всех возможных переходов в новое состояние осуществляется тот, при котором в каждый момент времени быстрота изменения волновой функции *V(x,t)* принимает стационарное значение

$$\delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = 0 \tag{3}$$

Введем в рассмотрение полную вариацию от быстроты изменения волновой функции:

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = \delta\left(\frac{dV}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right)\Delta t, \quad (\Delta t = dt) \tag{4}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}^T \frac{dx}{dt}$$

Пусть волновая функция (*V*-функция) есть однозначная, конечная, дважды дифференцируемая по своим аргументам функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} f_i(x) f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} \frac{df_i(x)}{dt} \tag{5}$$

$f_i(x)$ – компоненты *n*-мерной вектор-функции правых частей уравнений движения объекта (1).

<u>Теорема I</u>

Для перехода в новое состояние необходимо и достаточно существование *V*-функции, удовлетворяющей условию:

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = 0\,. \tag{6}$$

<u>Теорема II</u>.

Движение объекта (1) происходит так, что в каждый момент времени вектор фазовой скорости сонаправлен с градиентом волновой функции т.е.

$$\frac{\partial V}{\partial x}^T f = |\lambda|\,|\dot{x}|\,. \tag{6a}$$

Данная теорема показывает, что волна управляет движением объекта, т.е. она является подтверждением концепции волна-пилот Луи де Бройля [4].

2. Новая постановка прямой и обратной задачи динамики на базе метода V-функции.

Прямую задачу динамики можно поставить в следующем виде:

Заданы дифференциальные уравнения, описывающие траекторию движения объекта (1).

Требуется определить волновую функцию *V(x,t)*, удовлетворяющей уравнению (5).

Начальные и граничные условия для (5) определяются из теорем I, II и из условия связанности волновой функции *V(x,t)* с траекторией движения объекта (1). Условия связанности дают начальное условие для волновой функции:

$$V(x,t)\big|_{t=0} = V(x,0) = 0 \tag{7}$$

и граничное условие для волновой функции:

$$V(x,t)\big|_{x=0} = V(0,t) = 0 \tag{8}$$

Из теорем I и II следуют два других условия. Из условия теоремы I

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}}\delta x\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}}\dot{x}\right)dt = 0 \tag{9}$$

с учетом того, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x}^{T}\delta x\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x}^{T}\dot{x}\varepsilon\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}^{T}\dot{x} = const\,. \tag{10}$$

следует равенство:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)=0 \tag{11}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=const \tag{12}$$

Тогда второе начальное условие для уравнения (5) будет иметь вид:

$$\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\partial V(x,0)}{\partial t}=const \tag{13}$$

Из условия теоремы II следует:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=k^{-1}\dot{x}\,, \tag{14}$$

Отсюда получается второе краевое условие:

$$\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{\partial V(0,t)}{\partial x}=k^{-1}\dot{x}(t)=k^{-1}f\,(x=0)\,. \tag{15}$$

Для случая $\dot{x}=\vartheta$ (n = 1) получаем решение уравнения (5) с учетом (7)-(8), (13), (15) в следующем виде:

$$V(x,t)=\pm Ae^{\pm i(\frac{\omega}{\vartheta}x-\omega t)} \tag{16}$$

Обратная задача динамики на базе метода V-функции ставится следующим образом:

Для заданной волновой функции *V(x,t)*, удовлетворяющей уравнению (5), которую запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\dot{x}^T W\dot{x}=\frac{\partial V^T}{\partial x}\frac{d\dot{x}}{dt},\quad W=\left[\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right] \tag{17}$$

требуется определить дифференциальные уравнения движения объекта (1).

При заданной волновой функции из (6а) сразу следует решение обратной задачи динамики:

$$\dot{x}_i = k\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{18}$$

Используя (10) и теорему II можно показать, что выполняется

$$\frac{\partial V}{\partial x}^T \frac{d}{dt}\dot{x} = 0 \tag{19}$$

Из (19) с учетом (18) получается при *k=1* равенство

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = \frac{1}{2}\dot{x}^T\dot{x} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i{}^2 = c_1 \tag{20}$$

Решая обратную задачу, мы получили не только уравнения движения (18), правые части которых зависят от способа задания V-функции, но и выход к основаниям механики Г.Герца, который следует из (20).

Г. Герц в последние годы своей недолгой, но плодотворной творческой жизни подготовил гениальный труд «Принципы механики, изложенные в новой связи» [5]. Свой принцип Г. Герц сформулировал так: «Каждое естественное движение самостоятельной материальной системы состоит в том, что система движется с постоянной скоростью по одному из своих прямейших путей». Он провел в своем исследовании геометризацию механики, построив ее на основе трех понятий: пространство, время и масса. Сила (или энергия) для него является вторичным понятием и определяется скрытыми связями и скрытым движением. Принцип прямейшего пути, как показывает Г. Герц, является более общим в том смысле, что из него вытекают и интегральные энергетические принципы, принцип кратчайшего пути, принцип кратчайшего времени. А из (20) и (10) следует, что в нашем принципе содержится и принцип Г. Герца.

Для одномерного случая (*n = 1*) уравнение (17) с учетом (19) примет вид:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\dot{x}^2 = 0 \qquad (21)$$

Пусть волновая функция задана в виде уравнения плоской волны (16), которая распространяется в направлении движения объекта. Тогда (16) будет удовлетворять (21), если $\dot{x} = \vartheta$.

При этом из равенства (12), где волновая функция задана в виде (16), следует

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \mp iA\omega e^{\pm i(\frac{\omega}{\vartheta}x - \omega t)} = const\,. \qquad (22)$$

Постоянная в правой части (22) есть действительное число. Поэтому для того, чтобы удовлетворить условию (22) фаза должна принимать значения:

$$\varphi = \left(\frac{\omega}{\vartheta}x - \omega t\right) = \omega\left(\frac{x}{\vartheta} - t\right) = \frac{\pi}{2} + \pi n\text{, }(n=0,1,2,3....) \qquad (23)$$

Так как $\dot{x} = \vartheta \Rightarrow \quad \frac{x}{\vartheta} - t = C$, поэтому равенство (23) принимает вид:

$$\omega C = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2C}(1+2n) = \frac{\omega_0}{2}(1+2n)\,, \qquad (24)$$

т.е. в решении (16) собственные частоты могут принять только определенные дискретные значения. Тогда (22) с учетом (23) и (24) будет иметь вид:

$$A\omega = A\frac{\omega_0}{2}(1+2n) = const \qquad (25)$$

Это значит, что и равенство (22) принимает только дискретные значения и движение объекта будет происходить вдоль направления перемещения фронта волны А из равенства (14) с учетом (16) следует

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = \pm i\frac{A\omega}{\vartheta}e^{\pm i(\frac{\omega}{\vartheta}x - \omega t)} = k^{-1}\dot{x} = k^{-1}\vartheta\,, \qquad (26)$$

Отсюда с учетом (22) получаем

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\vartheta = k^{-1}\vartheta^2 = const\,. \qquad (27)$$

Равенство (27) не что иное как выполнение (10) при *n*=1.

3. Продолжение оптико-механической аналогии.

Оптико-механическая аналогия – это прежде всего взгляд на природу света. В разные времена исследователи поднимали эту проблему и решали ее на базе имеющегося физико-математического аппарата. Так Гамильтоном, Луи де Бройлем, Шредингерем оптико-механическая аналогия проводится на базе существующих вариационных принципов и решается на уровне геометрической оптики. В результате такой аналогии получается, что фазовая скорость волны обратно пропорционально скорости частицы. Именно оптико-механическая аналогия позволила Л. де Бройлю установить волновые свойства материи [6], а Шредингеру – постулировать свое волновое уравнение [7].

Рассмотрим траекторное движение частицы, удовлетворяющей уравнению (14) $\dot{x} = k\frac{\partial V}{\partial x}$ Траекторному движению частицы, как следует из (21) соответствует волновое движение, удовлетворяющее волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - \left(k\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = 0\,. \qquad (28)$$

Функция (16) $V(x,t) = Ae^{i(\frac{\omega}{\vartheta}x-\omega t)}$ будет удовлетворять уравнению (28), если выполняется равенство (24). В этом случае получаем $|A| = \frac{k^{-1}\vartheta^2}{\omega}$. Пусть здесь $k^{-1} = m$ - масса частицы. Тогда амплитуда $|A|$ принимает размерность действия. Если примем $A = \frac{h}{2\pi} = \hbar$, *h* - постоянная Планка, то из (25) следует правило квантования энергии, такое же как у Шредингера в случае планковского осциллятора. При этом из (26) с учетом (23) получаем

$$\frac{\hbar\omega}{\vartheta} = m\vartheta. \tag{29}$$

Используя полученные результаты, можно провести такие соответствия между волной и частицей

$$\begin{aligned} &\vartheta = \vartheta, \ \ \omega = \frac{m\vartheta^2}{\hbar}, \\ &\lambda = \frac{h}{m\vartheta}, \ \ A = \hbar \end{aligned} \tag{30}$$

При этом волновые и траекторные измерения можно описать одной волновой функцией:

$$V(x,t) = Ae^{\pm i(\frac{\omega}{\vartheta}x - \omega t)} = \hbar e^{\pm i\frac{1}{\hbar}(\frac{\hbar\omega}{\vartheta}x - \hbar\omega t)} = \hbar e^{\pm i\frac{1}{\hbar}(m\vartheta x - Et)} \tag{31}$$

В соотношениях (30) основным является равенство фазовой скорости волны и скорости частицы, в то время как в квантовой механике скорость частицы равна групповой скорости волн Л. де Бройля. Условие же квантования энергии (25) получается естественным образом в результате решения обратной задачи и здесь не возникают проблемы, которые появляются в квантовой механике при использовании волнового уравнения Шредингера. Сама волна у Шредингера не имеет реального физического смысла, оставаясь лишь математическим аппаратом в виде волнового уравнения с комплексным коэффициентом, вычисление собственных значений волновой функции которого и задает правило квантования энергии.

Рассмотрим как соотносится метод V-функции с оптико-механической аналогией Н.Г. Четаева. Для этого сначала покажем связь локального вариационного принципа с принципом Гамильтона.

Так если принцип Гамильтона $\delta S = \delta\left(\int\limits_{t0}^{t} L dt\right) = 0$ определяет состояние механической системы на некотором фиксированном интервале времени, а уравнения движения, полученные из данного принципа определяют состояние в каждый момент времени, то локальный принцип определяет еще волновой процесс внутри состояния

Пусть $V(q,t)=e^{i\frac{S(q,t)}{h}}$, где S — главная функция Гамильтона. Тогда

$$\delta\left(\frac{dV}{dt}\right)=\delta\left(\frac{i}{h}\frac{dS}{dt}e^{\frac{iS}{h}}\right)=\frac{i}{h}\delta\left(\frac{dS}{dt}\right)e^{\frac{iS}{h}}-\frac{1}{h^2}\frac{dS}{dt}\delta Se^{\frac{iS}{h}}=0. \qquad (32)$$

Отсюда отдельно должны выполняться:

$$\delta\left(\frac{dS}{dt}\right)=0 \qquad (33)$$

$$\delta S=0 \qquad (34)$$

Как видно из (34) в представлении $V=e^{\frac{iS}{h}}$ локальный принцип содержит в себе и принцип Гамильтона. И при этом действие по Гамильтону $S=\int\limits_{t0}^{t}Ldt$ должно удовлетворять дополнительному условию (33).

Н.Г. Четаев в своей работе [8] показал как соотносится устойчивое движение голономной консервативной системы с волновым уравнением — математической теорией распространения света Коши. Он исходил из устойчивости уравнения в вариациях для приведенной системы:

$$\delta\dot{q}_k=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(a_{kj}\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)\delta q_i. \qquad (35)$$

При этом условие устойчивости взято в виде:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(a_{ij}\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)=0. \qquad (36)$$

Используя это условие для функции *Φ(Et+W)*, он получил волновое уравнение:

$$\frac{2(E+U)}{E^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\right) \tag{37}$$

где *E* – постоянная живой силы, *U* – силовая функция системы.

Исходя из равенства (33), будем иметь:

$$\delta\left(\frac{dS}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\delta\dot{q}_i=$$
$$=\sum_i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j)\delta q_i+\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\delta\dot{q}_i=0. \tag{38}$$

Учитывая (35) и что *S* = *Et* + *W*, а также

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij}a_{ij}p_ip_j-U(q)\right)=\sum_{ij}a_{ij}p_j=\sum_{ij}a_{ij}\frac{\partial W}{\partial q_j}$$

будем иметь из (38), переходя к матричному представлению: $(A=A^T)$

$$0+\left(\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^T A\frac{\partial W}{\partial q}\right)^T+\frac{\partial W}{\partial q}^T A\frac{\partial W}{\partial q}\frac{\partial}{\partial q}^T=$$
$$=2\frac{\partial W}{\partial q}^T A\frac{\partial W}{\partial q}\frac{\partial}{\partial q}^T=0 \tag{39}$$

Равенство (39) выполняется при условии, если:

$$Tr\left(\frac{\partial}{\partial q}\left(A\frac{\partial W}{\partial q}\right)^T\right)=\frac{\partial}{\partial q}^T\left(A\frac{\partial W}{\partial q}\right)=0\,. \tag{40}$$

которое совпадает с условием (36) для устойчивого движения системы (35).

Если Н.Г. Четаев обосновал свои идеи тем, что всегда имеются в природе неучтенные возмущения и движение совершается не по устойчивой траектории, а в малой области обволакивающей траекторию и это явление дает представление о волне [9], то в нашем случае волновое движение исходит из локального принципа. При этом сама волновая функция *V(x,t)* не только как-то связана с движением объекта, а непосредственно выражает само движение, которое всегда имеет волновой характер.

4. Гамонический осциллятор

Рассмотрим линейный гармонический осциллятор. Уравнение траекторного движения объекта (частицы)

$$m\ddot{x} = -kx \tag{41}$$

допускает первый интеграл $\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E$.

Квадрат скорости частицы примет вид

$$\dot{x}^2 = \frac{2E - kx^2}{m}. \tag{42}$$

Подставив (42) в уравнение (21), получим:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \left(\frac{2E - kx^2}{m}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \tag{43}$$

Будем искать волновую функцию *V*(*x,t*) в виде $V(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$. Из уравнения (43) получается следующее стационарное уравнение:

$$\psi'' + \frac{m\omega^2}{2E - kx^2}\psi = 0 \tag{44}$$

Начальные условия (8), (15) для функции $\psi(x)$ будут иметь вид:

$$\psi(x)\big|_{x=0} = \psi(0) = 0, \quad \psi'(x)\big|_{x=0} = \psi'(0) = C_1; \tag{45}$$

Как видно из уравнения (44) $\psi\left(x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\right) = 0$. Выполнение этого условия возможно лишь при конкретных значениях собственных частот уравнения (44). Приведем уравнение (44) к виду

$$\psi'' + \frac{\eta^2}{1-\xi^2}\psi = 0\,, \qquad (46)$$

где $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{2E}{k}}}$ – безразмерная величина, $\eta^2 = \dfrac{m\omega^2}{k} = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

Эти частоты определим численно из решения уравнения (46) с начальными условиями (45). Введем для этого вспомогательные функции

$$\psi_1 = \psi\,;$$

$$\psi_2 = \psi'\,.$$

и систему

$$\begin{cases} \psi_1{}' = \psi_2; \\ \psi_2{}' = \dfrac{\eta^2}{\xi^2 - 1}\psi_1. \end{cases}$$

будем решать методом Рунге-Кутта четвертого порядка, с начальными значениями $\psi_1(0) = 0,\ \psi_2(0) = C_1$. Получим

$$\eta_1^2 = \frac{\hbar^2\omega_1^2}{\hbar^2\omega_0^2} = 6,\quad \eta_2^2 = \frac{\hbar^2\omega_2^2}{\hbar^2\omega_0^2} = 20,\quad \eta_3^2 = \frac{\hbar^2\omega_3^2}{\hbar^2\omega_0^2} = 42,\quad \eta_4^2 = \frac{\hbar^2\omega_4^2}{\hbar^2\omega_0^2} = 72, \ldots$$

С учетом результатов оптико-механической аналогии $2E = \hbar\omega,$ правило квантования энергии гармонического осциллятора получаем в следующем виде

$$E_{n+2}^2 - 2E_{n+1}^2 + E_n^2 = \Delta\Delta E_n^2 = 2\hbar^2\omega_0^2 \qquad (47)$$

Таким образом, при траекторно-волновом движении частицы, энергия гармонического осциллятора может принять только определенные дискретные значения:

$$E_1^2 = 6\hbar^2\omega_0^2,\ E_2^2 = 20\hbar^2\omega_0^2,\ E_3^2 = 42\hbar^2\omega_0^2,\quad E_4^2 = 72\hbar^2\omega_0^2 \ldots$$

Также данные значения получены аналитически с помощью программного комплекса Maple

$$\psi(x)=\frac{1}{E}C_1x(E-\frac{kx^2}{2})\text{hypergeom}\left(\left[\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4m\omega^2}{k}+1}\right],\left[\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4m\omega^2}{k}+1}\right],\left[\frac{3}{2}\right],\frac{kx^2}{E}\right)$$

и в виде ряда

$$\psi(x)=\frac{1}{E}C_1x(E-\frac{kx^2}{2})(1+\frac{1}{12}\frac{6k-m\omega^2}{E}x^2+\frac{1}{480}\frac{(6k-m\omega^2)(20k-m\omega^2)}{E^2}x^4+$$
$$\frac{1}{40320}\frac{(6k-m\omega^2)(20k-m\omega^2)(42k-m\omega^2)}{E^3}x^6+$$
$$\frac{1}{5806080}\frac{(6k-m\omega^2)(20k-m\omega^2)(42k-m\omega^2)(72k-m\omega^2)}{E^4}x^8+\ldots)$$

Как известно [7], Шредингер получил правило квантования энергии для гармонического осциллятора в виде $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$. Если эти результаты подставить в равенство (47) мы будем иметь $\left(\left(n+2+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(n+1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)\hbar^2\omega_0^2=2\hbar^2\omega_0^2$, т.е. получаем тождество.

Проведенные исследования показывают что, если волновая функция (*V*-функция) имеет размерность действия ($[кг][м/с][м]$), то квантование энергии объекта (частицы) для случая равномерного прямолинейного движения происходит по такому же правилу, что и у Шредингера для гармонического осциллятора. Метод *V*-функции для гармонического осциллятора позволяет установить соответствующую картину квантования энергии (47). У реальных микроскопических осцилляторов, взаимодействующих со светом [9], могут осуществляться переходы только между соседними уровнями, что полностью согласуется с нашими результатами.

Список использованных источников

1. Валишин Н.Т. Локальный вариационный принцип: к новой постановке прямой и обратной задачи динамики. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Казань, 1998. 111 с.
2. Валишин Н.Т., Валишин Ф.Т. К вопросу о природе неопределенности в квантовой физике (К физической постановке проблемы управляемости) // Новейшие проблемы теории поля. Казань, 2000.
3. Valishin N.T., Valishin F.T., Moiseev S.A. Trajectory-Wave Approach to Electron Dynamics in Hydrogen Atom // Cornell University Library. 2011. arXiv: quant-ph/1102.1654v1.
4. Л. де Бройль. Волны и кванты. Кванты света, дифракция и интерференция. Кванты, кинетическая теория газов и принцип Ферма // Успехи физических наук. 1967. Т. 93. Вып. I.
5. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М., 1952.
6. Л. де Бройль Исследования по теории квантов // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 641-667.
7. Шредингер Э. Квантование как задача о собственных значениях // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 668-704.
8. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 393-406.
9. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 245-249.
10. Голдин Л.Л., Новикова Г.И. Квантовая физика. Вводный курс. М., 2002. 496 с.