УДК 681.5

О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Бородина Ольга Владимировна

старший преподаватель

Купрюхин Александр Александрович

канд. экон. наук

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург

Аннотация. Большинство компьютерных вычислений основано на бинарной логике (0 и 1), однако при исчислении вещественных (натуральных) чисел присутствует погрешность. Одно из возможных решений этой проблемы лежит в переходе к постбинарным вычислениям, основанным на инструментах интервального анализа.

Ключевые слова: натуральное число; бинарные вычисления; погрешность; интервальный анализ; арифметика.

APPLICATION OF INTERVAL ANALYSIS TO IMPROVE THE ACCURACY OF COMPUTER CALCULATIONS

Borodina Olga Vladimirovna

senior lecturer

Kupryhin Alexander Alexandrovich

candidate of economic sciences

Saint-Petersburg State University Of Civil Aviation, Saint-Petersburg

Abstract. Most of the computing is based on binary logic (0 and 1), but when calculating the real (natural) numbers present error. One possible solution to this problem lies in the transition to postminimal calculations based on interval analysis tools.

Key words: natural number; binary computation; error; interval analysis; arithmetic.

Натурально число может быть представлено в системе десятичной или двоичной (бинарной). Компьютеры, как электронные вычислительные машины построены на бинарной системе (электронный 0 или 1). Например, дробное число 1/10 может порождать вычислительную неточность, т.к. компьютер не может выполнять точные вычисления с этим числом [2]. На классических вычислительных машинах дробь 1/10 не имеет точного внутреннего представления, и должна быть приближена подходящей двоичной дробью. В качестве такого приближения разработчики взяли 24-битное двоичное число 0.00011001100110011001100, которое меньше, чем 1/10, примерно на одну миллионную, что и рождает погрешность.

Для вычисления погрешности математической модели используют интервальный анализ, который и зародился с целью повышения точности вычислений (из определения в «Большой математической энциклопедии», 1985 год). Инструменты интервального анализа используют для постановки задачи и её решению шкалы в вещественном формате, обозначены двумя границами – верхней и нижней.

В границы интервалов включены и ошибки округления исходных иррациональных чисел. Погрешность вычисления неизбежна при любых типах вычислений, но при интервальном исчислении учитывается с помощью направленных округлений: меньшая из вычисленных границ получается округлением до ближайшего машинного числа с недостатком, а большая – с избытком.

В интервальном анализе исходные данные и промежуточные результаты представляются граничными значениями, над которыми и производятся все операции. При этом сами операции (прежде всего арифметические) определяются таким образом, что результат соответствующей точной операции обязательно лежит внутри вычисляемых границ. Решение интервальных уравнений заключается в отыскании функции принадлежности только на границах (верхней и нижней).

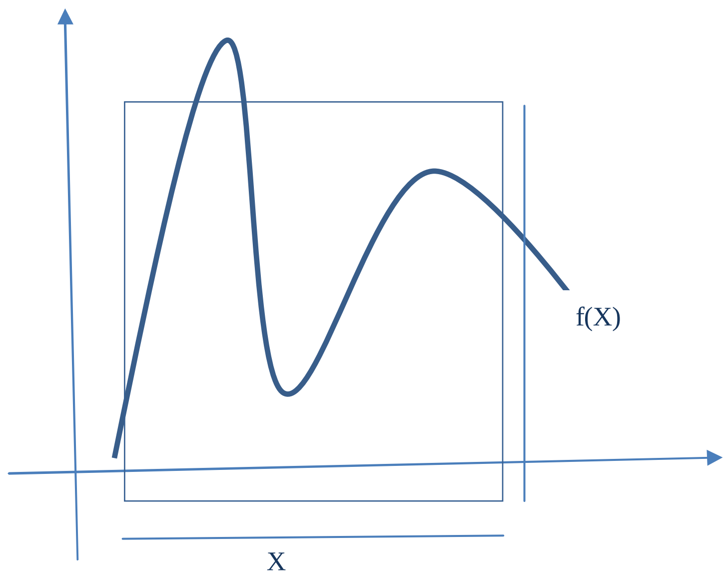

Рис. 1 Интервальное расширение функции

Таким образом, результатом интервального исчисления может быть три состояния (ответа) на вопрос о том, лежит ли результат в «плоскости» решений. Погрешность включается либо с недостатком, либо с избытком. «Плоскость» для интервальных уравнений – это либо «брус» с нулевой шириной (при одномерной оптимизации уравнений), либо «брус» с шириной, длиной и высотой, отображающий область решения интервальных уравнений глобальной оптимизации.

Так, С.П. Шарый пишет, что результат работы алгоритма глобального доказательного уравнения выдает пользователю три списка брусов:

– *НавернякаРешения* состоящие из брусов шириной меньше δ, которой гарантированно содержат решения;
– *ВозможноРешения* состоящие из брусов шириной меньше δ, подозрительной на содержания решения;
– *Недообработанные*, состоящие из брусов которые имеют ширину меньше δ, но для которых не доказано ни существование решений, ни их отсутствия [3].

Интервальные уравнения решаются посредством интервальной арифметики (Каухера, например), в которой применяются следующие правила выполнения операций сложения (1), вычитания (2), умножения (3) и деления (4) двух интервалов друг на друга:

$$[\alpha1, \alpha2\ ] + [\alpha3, \alpha4] = [\alpha1, \alpha2, \alpha3, \alpha4]; \quad (1)$$

$$[\alpha1, \alpha2\ ] - [\alpha3, \alpha4] = [\alpha1 - \alpha3, \alpha2\ - \alpha4]; \quad (2)$$

$$[\alpha1, \alpha2\ ] \times [\alpha3, \alpha4] = \left[\min \begin{matrix} (\alpha1\alpha3, \alpha1\alpha4, \alpha2\alpha3, \alpha2\alpha4), \\ \max(\alpha1\alpha3, \alpha1\alpha4, \alpha2\alpha3, \alpha2\alpha4) \end{matrix}\right]; \quad (3)$$

$$[\alpha1, \alpha2\ ] \div [\alpha3, \alpha4] = \left[\min \begin{matrix} \left(\frac{\alpha1}{\alpha3}, \frac{\alpha1}{\alpha4}, \frac{\alpha2}{\alpha3}, \frac{\alpha2}{\alpha4}\right), \\ \max\left(\frac{\alpha1}{\alpha3}, \frac{\alpha1}{\alpha4}, \frac{\alpha2}{\alpha3}, \frac{\alpha2}{\alpha4}\right) \end{matrix}\right], \text{где } 0 \notin [\alpha3, \alpha4]; \quad (4)$$

Интервальная арифметика имеет некоторые ограничения, однако наличие направленных округлений в интервальном анализе (вместо плавающего числа в компьютерных исчислениях) делает накопление ошибки контролируемым, повышая надёжность вычисления. Для вычисления закономерности распределения используются, например, мода (для определения частости) или медиана (показатель центра распределения). Эта простая алгебра открывает возможности для математического моделирования систем и повышения точности в моделях отражающих семантику отношений в сложных системах.

Учитывая, что бинарная модель вычислений с плавающей точкой не предназначена ни для представления, ни для отслеживания вычислительных ошибок, она не предлагает анализа точности результатов и неучтённые ошибки вычислений создают повышенный риск (можно вспомнить обрушение зданий в Москве, построенных по одному и тому же проекту в начале 2000-х годов).

Применение инструментов интервального анализа и интервальной арифметики может способствовать повышению точности вычислений при моделировании поведения сложных систем, тем более что существует программное обеспечение для реализации низкоуровневой поддержки интервальных типов данных (как минимум реализовано для платформ Windows и Linux).

Список использованных источников

1. Hayes B. A Lucid Interval // A reprint from American Scientist the magazine of Sigma Xi, the Scientific Research Society. V. 91. № 6.
2. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. 2004.
3. Строгий учет ошибок округлений на цифровых ЭВМ [Электронный ресурс]. URL:http://www.sbras.ru/interval/index.php?j=Introduction/RusIntro