УДК 512.542

О Ω-НАСЛЕДСТВЕННОМ ПОДГРУППОВОМ ФУНКТОРЕ τ_Ω

Петрушин Павел Викторович
магистрант
Сорокина Марина Михайловна
кандидат физико-математических наук
Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Брянск
author@apriori-journal.ru

Аннотация. В статье изучается Ω-наследственный подгрупповой функтор τ_Ω, ставящий в соответствие каждой конечной группе G саму группу G и все ее подгруппы, принадлежащие Ω, где Ω – некоторый непустой класс простых конечных групп. Устанавливается τ_Ω-замкнутость Ω-расслоенной формации конечных групп, а также τ_Ω-замкнутость ее максимального внутреннего Ω-спутника.

Ключевые слова: конечная группа; подгрупповой функтор; класс групп; формация групп; τ-замкнутая формация; Ω-расслоенная формация.

ON Ω-INHERITED SUBGROUP FUNCTOR τ_Ω

Petrushin Pavel Victorovich
undergraduate
Sorokina Marina Mikhailovna
candidate of physical and mathematical sciences
Bryansk State University named by I.G. Petrovsky, Bryansk

Abstract. In this article we have studied Ω-inherited subgroup functor τ_Ω, which puts in conformity for every finite group G itself and all of its subgroups belonging to Ω, where Ω is a some nonempty class of simple finite groups. There has been established τ_Ω-closure of an Ω-foliated formation of finite groups and τ_Ω-closure of its maximal inner Ω-satellite.

Key words: a finite group; a subgroup functor; a class of groups; a formation of groups; a τ-closed formation; an Ω-foliated formation.

В современной теории групп одно из центральных мест занимает понятие подгруппового функтора. Подгрупповой функтор есть отображение, ставящее в соответствие каждой группе некоторую непустую систему ее подгрупп. Основные положения теории подгрупповых функторов изложены в монографии С.Ф. Каморникова и М.В. Селькина [1], в которой отражена тесная связь между подгрупповыми функторами и классами конечных групп. Исследованием подгрупповых функторов и их влияния на классы групп занимались А.Н. Скиба, А.Ф. Васильев, Л.А. Воробей, И.А. Кузменкова, Л.П. Авдашкова и многие другие (см., например, [2–6]). В частности, в [2] представлена теория τ-замкнутых локальных формаций конечных групп, где τ – регулярный подгрупповой функтор, называемый также подгрупповым функтором Скибы [1, с. 14].

Локальные и композиционные формации, которые строятся с помощью специальной функции – экрана (см., например, [7]), долгое время являлись главными объектами исследования теории формаций. В 1999 году В.А. Ведерников ввел в рассмотрение Ω-расслоенные формации, которые строятся с помощью уже двух сопутствующих функций – функции-спутника (аналог экрана) и функции-направления [8]. При этом композиционные формации представили один из видов расслоенных формаций.

В статье А.Ф. Васильева [9] изучаются слабо наследственные классы конечных групп, то есть классы групп, которые с каждой своей группой содержат и все ее подгруппы простого порядка, т.е. подгруппы, являющиеся простыми абелевыми группами. В этой связи интерес для исследования представляет такой подгрупповой функтор, который каждой группе сопоставляет некоторые ее подгруппы, являющиеся простыми группами. Настоящая работа посвящена исследованию Ω-наследственного подгруппового функтора τ_Ω, ставящего в соответствие каждой конечной группе G саму группу G и все ее подгруппы, принадлежащие Ω, где Ω – некоторый непустой класс простых конечных групп. В работе установлена τ_Ω-замкнутость Ω-расслоенной формации конечных групп, обладающей внутренним τ_Ω-замкнутым Ω-спутником, а также доказана τ_Ω-замкнутость ее максимального внутреннего Ω-спутника.

В работе используются определения и обозначения, принятые в [1; 8; 10]. Приведем лишь некоторые из них.

Множество групп $\mathfrak{X}$ называется классом групп, если с каждой своей группой G оно содержит и все группы, изоморфные G.

Пусть $\mathfrak{G}$ – класс всех конечных групп, $\mathfrak{I}$ – класс всех конечных простых групп, Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$.

Далее рассматриваются только конечные группы.

Через $K(G)$ обозначается класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $K(\mathfrak{X})$ – объединение классов $K(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – класс групп.

Пусть τ – отображение, которое ставит в соответствие всякой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп. Отображение τ называется подгрупповым функтором, если $\left(\tau(G)\right)^\varphi = \tau(G^\varphi)$ для любого изоморфизма φ каждой группы G [1, с. 13].

Пусть G – группа и H – подгруппа группы G. Тогда $H \cap \tau(G) = \{H \cap K \mid K \in \tau(G)\}$ [1, с. 13].

Подгрупповой функтор τ называется регулярным, если выполняются два условия: 1) $N \lhd G$, $M \in \tau(G) \Rightarrow MN/N \in \tau(G/N)$; 2) $M/N \in \tau(G/N) \Rightarrow M \in \tau(G)$ [1, с. 14]; наследственным, если для любой подгруппы H группы G справедливо включение $H \cap \tau(G) \subseteq \tau(H)$; включающим, если для любой подгруппы U группы G всегда из $H \in \tau(G)$ и $H \subseteq U \subseteq G$ следует $H \in \tau(U)$; транзитивным, если для любой группы G всегда из $S \in \tau(H)$ и $H \in \tau(G)$ следует $S \in \tau(G)$ [1, с. 15]; радикальным, если $X \cap \tau(G) = \tau(X)$ для любой группы G и любой ее нормальной подгруппы X [1, с. 16].

1. Подгрупповой функтор τ_Ω и его простейшие свойства

Следуя терминологии из [9], введем определение Ω-наследственного подгруппового функтора.

Определение 1. Ω-наследственным подгрупповым функтором назовем подгрупповой функтор, обозначаемый τ_Ω, который каждой группе G ставит в соответствие саму группу G и все ее подгруппы, принадлежащие Ω. В случае, когда Ω совпадает с $\mathfrak{I}$, будем использовать обозначение $\tau_{\mathfrak{I}}$.

Доказательство следующей леммы осуществляется непосредственной проверкой для τ_Ω сформулированных выше определений.

Лемма 1. *Подгрупповой функтор τ_Ω является включающим транзитивным подгрупповым функтором.*

Замечание 1. Подгрупповой функтор τ_Ω не является регулярным. Действительно, пусть $G = \mathbb{S}_3 = G_3 \rtimes G_2$, $M = G_3$, $G_3 \in \Omega$ и $N = M = G_3$. Тогда $M \in \tau_\Omega(G)$, но $MN/N \cong 1 \notin \tau_\Omega(G/N)$. Подгрупповой функтор τ_Ω не является наследственным. В самом деле, пусть $G = \mathbb{S}_5$, $\mathbb{A}_5 \in \Omega$, $H = G_2$, $K = \mathbb{A}_5 \cap H$. Тогда $K \in H \cap \tau_\Omega(G)$, но $K \notin \tau_\Omega(H)$. Следовательно, $H \cap \tau_\Omega(G) \nsubseteq \tau_\Omega(H)$. Подгрупповой функтор τ_Ω не является радикальным. Действительно, пусть $G = \mathbb{S}_3$, $G_2 \in \Omega$, $X = G_3$, $H = G_2$. Тогда $K = X \cap H \in X \cap \tau_\Omega(G)$, но $X \cap H = 1 \notin \tau_\Omega(X)$.

Через $F(\mathfrak{G})$ обозначается множество всех подгрупповых функторов. На множестве $F(\mathfrak{G})$ следующим образом вводится частичный порядок $\leq$: для любых $\tau_1, \tau_2 \in F(\mathfrak{G})$ $\tau_1 \leq \tau_2$ тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо включение $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ [1, с. 45].

Произведение подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 определяется следующим образом:

$$(\tau_1 \circ \tau_2)(G) = \{H \mid H \in \tau_1(K) \text{ и } K \in \tau_2(G)\} \quad [1, \text{с. } 46].$$

Отметим, что $F(\mathfrak{G})$ является полугруппой относительно операции $\circ$ [1, с. 46].

Лемма 2. *$\tau_\Omega \circ \tau_\Omega = \tau_\Omega$, т.е. τ_Ω – идемпотент полугруппы $(F(\mathfrak{G}),\circ)$.*

Доказательство. 1) Пусть $M \in (\tau_\Omega \circ \tau_\Omega)(G)$. Тогда существует подгруппа $K \in \tau_\Omega(G)$ такая, что $M \in \tau_\Omega(K)$. Если $M = K = G$, то $M \in \tau_\Omega(G)$. Пусть $M < G$. Это означает, что M – простая группа, принадлежащая Ω. Поэтому $M \in \tau_\Omega(G)$. Следовательно, $\tau_\Omega \circ \tau_\Omega \leq \tau_\Omega$.

2) Пусть $L \in \tau_\Omega(G)$. Тогда, учитывая, что $L \in \tau_\Omega(L)$, получаем $L \in (\tau_\Omega \circ \tau_\Omega)(G)$. Таким образом, $\tau_\Omega \leq \tau_\Omega \circ \tau_\Omega$.

Из 1)-2) следует, что $\tau_\Omega \circ \tau_\Omega = \tau_\Omega$. Тем самым установлено, что подгрупповой функтор τ_Ω является идемпотентом полугруппы $(F(\mathfrak{G}),\circ)$. Лемма доказана.

2. τ_Ω-замкнутые Ω-расслоенные формации

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ обозначает класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G.

$\mathfrak{G}_\Omega$ – класс всех конечных Ω-групп, т.е. таких групп G, для которых $K(G) \subseteq \Omega$; $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}_{(A)}$; $\mathfrak{G}_{A'} = \mathfrak{G}_{(A)'}$.

$\mathfrak{A}$ — класс всех конечных абелевых групп.

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$ – классы групп. Гашюцевым произведением классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп $\mathfrak{X}\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{G} \mid \exists N \lhd G, N \in \mathfrak{X}, G/N \in \mathfrak{H})$.

Формацией называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и конечных произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. $\mathfrak{F}$-радикалом группы G называется произведение всех нормальных подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$, и обозначается $G_\mathfrak{F}$. Используются следующие обозначения: $\mathrm{O}_\Omega(G) = G_{\mathfrak{G}_\Omega}$, $O_{A',A}(G) = G_{\mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A}$.

Функция $f: \Omega \cup \{\Omega'\} \to$\{формации групп\} называется ΩF-функцией; функция $g: \mathfrak{J} \to$\{формации групп\} называется F-функцией; функция

$\varphi\colon \mathfrak{J} \rightarrow$\{непустые формации Фиттинга\} называется FR-функцией. Функции f, g и φ принимают одинаковые значения на изоморфных группах из области определения [8, с. 126].

Формация $\Omega F(f,\varphi) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/\mathrm{O}_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G))$ называется Ω-расслоенной формацией с Ω-спутником f и направлением φ; формация $F(g,\varphi) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\varphi(A)} \in g(A)$ для всех $A \in K(G))$ называется расслоенной формацией со спутником g и направлением φ [8, с. 127].

Направление φ Ω-расслоенной формации называется b-направлением, если $\varphi(A)\mathfrak{G}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{J}$; r-направлением, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A)$ для любой группы $A \in \mathfrak{J}$; $x_1 \dots x_k$-направлением, если φ является x_i-направлением для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ [8, с. 128].

Через φ_3 обозначается направление Ω-композиционной формации, т.е. $\varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathfrak{J}$, где $\mathfrak{S}_{cA}$ – класс всех конечных групп, у которых каждый главный A-фактор централен [8, с. 128].

Ω-спутник f Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ называется внутренним, если $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$.

Пусть τ – подгрупповой функтор. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ [2, с. 23]. Ω-спутник Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если все его значения являются τ-замкнутыми формациями.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{X}$ – непустой нормально наследственный класс групп, $\mathfrak{H}$ – τ_Ω-замкнутый класс групп, $1 \in \mathfrak{H}$. Тогда класс групп $\mathfrak{F}$ также является τ_Ω-замкнутым.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $B \in \tau_\Omega(G)$, $B \neq G$. Покажем, что $B \in \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то существует $N \lhd G$ такая, что $N \in \mathfrak{X}$ и $G/N \in \mathfrak{H}$. Рассмотрим факторгруппу BN/N. Поскольку $BN/N \cong B/B \cap N$ и B – простая группа, то возможны два случая: либо $B \cap N = 1$, либо $B \cap N = B$.

1) Пусть $B \cap N = 1$. Тогда $B \cong BN/N \in \Omega$, и значит, $BN/N \in \tau_\Omega(G/N)$. Учитывая, что $G/N \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ – τ_Ω-замкнутый класс групп, получаем $B \in \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{X}$ – непустой нормально наследственный класс групп, то $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, и поэтому $B \in \mathfrak{F}$.

2) Пусть $B \cap N = B$. Тогда B — нормальная подгруппа группы N. Учитывая, что $N \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — нормально наследственный класс групп, получаем $B \in \mathfrak{X}$. Так как $1 \in \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, и значит, $B \in \mathfrak{F}$.

Таким образом, класс групп $\mathfrak{F}$ является τ_Ω-замкнутым. Лемма доказана.

<u>Лемма 4</u>. *Пусть $\Omega \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с br-направлением φ, $\varphi \leq \varphi_3$, f – τ_Ω-замкнутый внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является τ_Ω-замкнутой формацией.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $H \in \tau_\Omega(G)$, $H \neq G$. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Так как $H \in \tau_\Omega(G)$, то $H \leq G$, причем H – простая группа из Ω. Поскольку $\Omega \subseteq \mathfrak{A}$, то $H \cong Z_p$ для некоторого простого числа p. По следствию 3 [10] $\mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть f_1 – минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{F}, \varphi)$ и $G \in \mathfrak{F}$, то по теореме 5 [8] $f_1(Z_p) \neq \emptyset$. Ввиду теоремы 5 [8] $f_1(Z_p) \subseteq f(Z_p)$, и поэтому $f(Z_p) \neq \emptyset$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(Z_p)$. Таким образом, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Это означает, что $H \cong Z_p \in \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F}$ – τ_Ω-замкнутая формация. Лемма доказана.

<u>Теорема 1</u>. *Пусть $\Omega \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с br-направлением φ, $\varphi \leq \varphi_3$, f – τ_Ω-замкнутый внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда максимальный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$ является τ_Ω-замкнутым.*

<u>Доказательство</u>. По следствию 5.8 [11] формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним Ω-спутником h таким, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = \mathfrak{G}_A f(A)$ для всех $A \in \Omega$. Так как по лемме 4 формация $\mathfrak{F}$ является τ_Ω-замкнутой, то $h(\Omega')$ – τ_Ω-замкнутая формация. Так как $\mathfrak{G}_A$ – нормально

наследственная формация и $f(A)$ – τ_Ω-замкнутая формация, то по лемме 3 $h(A)$ является τ_Ω-замкнутой формацией для любого $A \in \Omega$. Таким образом, h – τ_Ω-замкнутый Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется Ω-канонической, или, коротко, ΩK-формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой группы $A \in \mathfrak{I}$, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega KF(f) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G))$; аналогично, $\mathfrak{F} = F(g, \varphi) = KF(g) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{A',A}(G) \in g(A)$ для всех $A \in K(G))$ – каноническая формация, или, коротко, K-формация [8].

<u>Лемма 5</u>. *Пусть $\mathfrak{F}$ – Ω-каноническая формация, f – τ_Ω-замкнутый внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ – τ_Ω-замкнутая формация.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $H \in \tau_\Omega(G)$, $H \neq G$. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Так как $H \in \tau_\Omega(G)$, то $H \leq G$, причем H – простая группа из Ω. Пусть $H = A$. Тогда $H \in \mathfrak{G}_A$. По лемме 7 [10] $\mathfrak{G}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega$.

Пусть f_1 – минимальный Ω-спутник Ω-канонической формации $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} = \Omega KF(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathfrak{F}$, то по теореме 5 [8] $f_1(A) \neq \emptyset$, и значит, $f(A) \neq \emptyset$. Следовательно, $\mathfrak{G}_A \subseteq \mathfrak{G}_A f(A)$, и поэтому $\mathfrak{G}_A \subseteq \mathfrak{F}$. Это означает, что $H \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ – τ_Ω-замкнутая формация. Лемма доказана.

<u>Следствие 1</u>. *Пусть $\mathfrak{F}$ – каноническая формация, f – $\tau_\mathfrak{I}$-замкнутый внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ – $\tau_\mathfrak{I}$-замкнутая формация.*

<u>Теорема 2</u>. *Пусть $\mathfrak{F}$ – Ω-каноническая формация, f – τ_Ω-замкнутый внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда максимальный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$ является τ_Ω-замкнутым.*

<u>Доказательство</u>. По теореме 2 [10] формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним Ω-спутником h таким, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = \mathfrak{G}_A f(A)$ для всех $A \in \Omega$. Так как по лемме 5 формация $\mathfrak{F}$ является τ_Ω-замкнутой, то $h(\Omega')$ – τ_Ω-замкнутая формация. Так как $\mathfrak{G}_A$ – нормально наследственная формация и $f(A)$ – τ_Ω-замкнутая формация, то по лемме

3 $h(A)$ является τ_Ω-замкнутой формацией для любого $A \in \Omega$. Таким образом, h – τ_Ω-замкнутый Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – каноническая формация, f – $\tau_\mathfrak{F}$-замкнутый внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда максимальный внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$ является $\tau_\mathfrak{F}$-замкнутым.*

Список использованных источников

1. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003. 254 с.
2. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.
3. Васильев А.Ф., Каморников С.Ф. Решеточные подгрупповые функторы. Препринт / Гомельский госуниверситет. Гомель, 1999. № 81. 21 с.
4. Воробей Л.А., Каморников С.Ф. О дополняемых элементах решетки подгрупповых функторов гомоморфа // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 12. С. 74-77.
5. Каморников С.Ф., Кузменкова И.А. Регулярные фильтрующие функторы и формации // Вопросы алгебры. 2000. Вып. 3(16). С. 116-118.
6. Каморников С.Ф., Авдашкова Л.П. Радикальные дистрибутивные функторы // Мат. заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 91-97.
7. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
8. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика. 2001. Т. 13. Вып. 3. С. 125-144.
9. Васильев А.Ф. О перечислении локальных формаций с условием Кегеля // Вопросы алгебры. 1992. Вып. 7. С. 86-93.
10. Vedernikov V.A. Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. № 2. P. 217-233.
11. Ведерников В.А., Демина Е.Н. Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп // Сиб. матем. ж. 2010. Т. 51. № 5. С. 990-1009.