УДК 539.3

ВНУТРЕННИЕ ПРОТИВОРЕЧИЯ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Кравчук Александр Степанович
доктор физ.-мат. наук
Кравчук Анжелика Ивановна
кандидат физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)
Тарасюк Иван Александрович
магистр
Физико-технический институт НАН Беларуси, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. Теория малых упругопластических деформаций не может быть отнесена к физически корректным теориям деформирования материалов в связи с тем, что нет возможности определить функцию, связывающую интенсивности напряжений и деформаций из экспериментов на простое растяжение, т.к. указанные напряжение и деформация по своей физической сути являются касательным напряжением и деформацией сдвига при напряженно-деформированном состоянии отличном от одноосного. Если же попытаться определить упомянутую функцию из опытов на простой сдвиг, то в случае упругих деформаций уравнения упругопластического деформирования не сводятся к соответствующим уравнениям упругого состояния. Кроме того, указанная теория не позволяет математически корректно решать задачи с одновременным использованием гипотез о несжимаемости материала при упругопластическом деформировании и плоской деформации двумерного объекта.

Ключевые слова: тензор деформаций; компоненты девиатора тензора напряжений; компоненты девиатора тензора деформаций; малые упругопластические деформации; интенсивность напряжений; интенсивность деформаций.

INTERNAL CONTRADICTIONS OF THE THEORY OF SMALL ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS

Kravchuk Alexander Stepanovich
doctor of physical and mathematical sciences
Kravchuk Anzhelica Ivanovna
candidate of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)
Tarasyuk Ivan Alexandrovich
graduate student
Physical-Technical Institute of National Academy of Sciences of Belarus
Minsk (Belarus)

Abstract. Theory of small elastoplastic deformations cannot be attributed to a physically correct theory of material deformation because the function connecting the stress intensity and the strain intensity cannot be determined by the experiments on a simple tension, because these stress and strain by their physical nature is the tangential stress and shear strain when the stress-strain state is different from uniaxial . If one tries to determine these functions from experiments on a simple elastic shear the elastoplastic equation cannot be reduced to the corresponding equations of elastic state. Furthermore the theory indicated above doesn't allow solving problems correctly using both hypotheses on the incompressible material in the elastoplastic deformation and plane deformation for the two-dimensional body.

Key words: strain tensor; the components of deviator of the stress tensor; the components of deviator of the strain tensor; small elastoplastic deformation; stress intensity; strain intensity.

Введение. Актуальность исследований уравнений состояния для упругопластических деформаций твердых тел неуклонно возрастает. Несмотря на то, что результаты этих исследований широко известны, остался ряд методических вопросов, которые не решены до настоящего времени.

Прежде всего, отметим, что уравнения, известные в странах СНГ под именем теории А.А. Ильюшина [1-3], являются незначительной переработкой теории Генки-Надаи [2; 3] и, соответственно, более уместно было бы называть эту теорию Генки-Надаи-Ильюшина как это сделано в монографии [4] (если есть необходимость учесть некоторый взнос последнего ученого).

Детально вывод уравнений теории малых упругопластических деформациях рассматривать не будем. Его можно найти в доступной в электронном виде литературе [1]. Приведем окончательные уравнения этой теории и проведем некоторый качественный анализ физического смысла экспериментально определяемых параметров в этой теории.

Отметим также, что тензорная запись уравнений состояния при малых упругопластических деформациях в современной литературе по механике твердого тела в странах СНГ существенно отличается от записи, используемой ранее, т.к. в настоящее время неявно используется тензор деформаций по Ильюшину, а не тензор деформаций по Коши [5].

К вопросу о тензорах деформаций. Ранее было установлено [5], что в уравнениях теории упругости негласно, без изменения названия, был заменен тензор деформаций по Коши:

$$\varepsilon_{ii} = u_{i,i} \ \ (i = 1,..,3),$$

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}\,, \ (i,j = 1,..,3, \ i \neq j)$$

на тензор деформации Ильюшина:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \ (i,j = 1,..,3),$$

где $u_i(x)$ ($x=(x_1,x_2,x_3)$) – компоненты поля перемещений.

Совершенно аналогичная ситуация с подменой тензоров деформаций наблюдается и в уравнениях состояния для малых упругопластических деформаций твердого тела [3].

Уравнения состояния упруго деформируемого тела. В результате проведения известных преобразований ранее получена система уравнений для тензора деформаций по Коши [5]:

$$s_{ii}=2\cdot G\cdot e_{ii}\ (i=1,..,3), \quad (1)$$

$$s_{ij}=G\cdot e_{ij}\ (i\neq j,\ i,j=1,..,3), \quad (2)$$

$$\sigma=K\cdot\Theta, \quad (3)$$

где s_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений,

e_{ij} – компоненты девиатора тензора деформаций,

$\sigma=\dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$ – среднее нормальное напряжение,

$\Theta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$ – объемная деформация,

$K=\dfrac{E}{3\cdot(1-2\cdot\nu)}$ – модуль объемной деформации [3].

Отметим [5], что система (1)-(3) отличается от общепринятой записи $s_{ij}=2\cdot G\cdot e_{ij}$ (для тензора деформаций по Ильюшину) тем, что случай $i\neq j$ вынесен в отдельное уравнение из-за очевидного несовпадения с коэффициентами в случае, когда $i=j$.

Соответственно, из (1)-(3) следует, что для обобщенного закона Гука даже в изотропном случае неверна гипотеза о соосности девиаторов деформаций и напряжений [5].

Уравнения Генки-Надаи-Ильюшина. Предполагается, что объемная деформация тела Θ считается упругой. Она прямо пропорциональна среднему нормальному напряжению σ (3). Эту гипотезу можно сформулировать так: за счет пластических деформаций изменение объема не происходит.

В терминах тензора деформаций по Коши уравнение малых упругопластических деформаций записывается в виде [1]:

$$s_{ii} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ii} \quad (i = 1,..,3), \tag{4}$$

$$s_{ij} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij} \quad (i \neq j, i, j = 1,..,3), \tag{5}$$

где σ_u – интенсивность напряжений,

ε_u – интенсивность деформаций.

Отметим, что использование (4) с требованием одновременного выполнения гипотез несжимаемости материала ($\Theta = 0$) и плоской деформации (например, $\varepsilon_{33} = 0$) невозможно, т.к. приводит к противоречивой системе уравнений.

При этом предполагается, что для каждого материала имеется зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций [1]:

$$\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u). \tag{6}$$

Противоречия теории малых упругопластических деформаций. Называть (6) универсальной зависимостью [1] нет возможности, исходя из физического смысла интенсивностей напряжений и деформаций, являющихся «эффективными» касательным напряжением и деформацией сдвига, соосными октаэдрическим напряжению и деформации при напряженно-деформированном состоянии отличном от одноосного.

Очевидно, что методически более верным и последовательным будет экспериментальное определение (6) по результатам испытаний на упругопластический сдвиг, например, при кручении. С другой стороны, учитывая одновременное выполнение (2) и (5) при упругом деформировании материала, должно выполняться $\frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} = 3 \cdot G$, т.е. уравнение (6) необходимо приобретает вид [3]:

$$\sigma_u = 3G \cdot \varepsilon_u \tag{7}$$

В связи с тем, что при использовании гипотезы о несжимаемости материала ($\nu = 1/2$) (7) совпадает с $\sigma_u = E \cdot \varepsilon_u$ и тем, что при формальном вычислении в случае одноосного нагружения по величине и знаку $\sigma_u = \sigma_1$ и $\varepsilon_u = \varepsilon_1$, то в известной монографии [1] предлагается определять Φ из экспериментов на одноосное растяжении и игнорировать указанный выше физический смысл интенсивностей деформаций и напряжений при напряженно-деформированном состоянии отличном от одноосного.

Для упругого случая (6), очевидно, примет вид $\sigma_u = G \cdot \varepsilon_u$, а теоретически необходимое соотношение (7) никогда не может быть реализовано при проведении экспериментов на упругий сдвиг. Поскольку в области упругих деформаций (при $\nu < 1/2$) функция $\Phi_1(\gamma)$ при кручении никогда не будет совпадать с $\Phi_2(\varepsilon)$ при одноосном растяжении, т.к. модуль упругости и модуль сдвига существенно различаются.

Таким образом, использование гипотезы о несжимаемости материала при упругопластических деформациях и оправдание на этой основе использования диаграмм одноосного растяжения для определения Φ в случае деформации сдвига ε_u и касательного напряжения σ_u является надуманным и не соответствует физическому смыслу ε_u и σ_u при напряженно-деформированном состоянии отличном от одноосного.

Выводы. Теория малых упругопластических деформаций не может быть отнесена к физически корректным теориям деформирования материалов в связи с тем, что нет возможности определить функцию Φ для интенсивностей напряжений и деформаций из экспериментов на простое растяжение, т.к. указанные напряжение и деформация по своей физической сути являются касательным напряжением и деформацией сдвига в случае напряженно-деформированного состояния, отличного от одноосного.

Если же попытаться определить функцию Φ из опытов на простой сдвиг, то в случае упругих деформаций уравнения упругопластического деформирования не сводятся к соответствующим уравнениям упругого состояния.

Кроме того, указанная теория не позволяет математически корректно решать задачи с одновременным использованием гипотез о несжимаемости материала при упругопластическом деформировании и плоской деформации двумерного объекта.

Список использованных источников

1. Ильюшин А.А. Пластичность: в 2 ч. Ч. 1: Упругопластические деформации. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 376 с.
2. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев: Наукова думка, 1981. 496 с.
3. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. Минск: БГУ, 2011. 543 с.
4. Новацкий В.К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.
5. Кравчук А.С., Кравчук А.И. К вопросам о несоосности девиаторов напряжений и деформаций в «неисправленных» уравнениях обобщенного закона Гука и о правомерности применения тензора деформаций по Ильюшину в современной механике твердого тела // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2015. № 3. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2015/Kravchuk-Kravchuk3.pdf