

УДК 539.3

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗНОСА ЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ,
А ТАКЖЕ ШАРОВЫХ ОПОР И НАКОНЕЧНИКОВ*****Кравчук Александр Степанович**

д-р физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

Чижик Сергей Антонович

д-р тех. наук

Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси,
Минск (Беларусь)**Мищак Анджей**

д-р тех. наук

Морская академия в Гдыне, Гдыня (Польша)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. В данной работе впервые поставлена и аналитически решена задача о внутреннем контакте тел с круговыми границами с учетом большой разности радиусов инденторов и радиусов поверхностей покрытий, а также произвольной глубины внедрения индентора в покрытие. Кроме того, предложен метод теоретического предсказания величины износа сопряжений твердых тел с круговыми границами, а также в качестве примера решены контактные задачи с учетом абразивного износа композиционного покрытия недеформируемым цилиндром и шаром. В работе также без вывода приведены заключительные формулы, определяющие абразивный износ вязкоупругого однородного покрытия цилиндрического подшипника скольжения или шаровой опоры.

Ключевые слова: основание Винклера; линейно-деформируемый материал; нелинейно-деформируемый материал; композиционный материал; слоистый материал; износ; ползучесть.

* Исследования выполнены в соответствии с проектом 7 рамочной программы ЕС (Grant Agreement Number: PIRSES-GA-2013-612593).

SIMULATION OF WEAR OF PROTECTIVE COATINGS OF CYLINDRICAL SLIDE BEARINGS AS WELL AS BALL BEARING AND TIPS

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Chizhik Sergey Antonovich

doctor of engineering sciences
A.V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute, Minsk (Belarus)

Miszczak Andrzej

doctor of engineering sciences
Akademia Morska w Gdyni, Gdynia (Poland)

Abstract. First performed and analytically solved the problem of internal contact of bodies with circular boundaries, taking into account the large difference between the radii of the indenter and the radii of the coating surface and an arbitrary depth of penetration of the indenter into the coating. In addition it was proposed a method of theoretical predictions of wear of bodies' conjugations with circular boundaries. An examples of the problem were solved for contact with the abrasive wear of the composite coating by rigid cylinders and sphere. Also at the end of the paper lists without taking the final formula determining abrasive wear viscoelastic homogeneous coating of cylindrical sliding bearing and ball bearing.

Key words: Winkler base; linearly deformable material; nonlinear deformable material; composite material; laminate material; wear; creep.

Введение. Контактные напряжения являются одним из основных факторов, определяющих долговечность машиностроительных конструкций. Анализ и классификация отказов изделий машиностроения показали, что основной причиной выхода из строя в условиях эксплуатации является не поломка деталей, а износ и нестабильность триботехнических характеристик сопряжений [1; 2].

Не смотря на большой интерес инженеров к решению контактных задач, являющихся моделями различных конструкций подшипников и опор скольжения, до настоящего времени эти задачи решались только при использовании очень «жестких» геометрических предположений о малости внедрения индентора в покрытие и малости зазора между индентором и поверхностью покрытия по сравнению с радиусом индетора [3-6]. Данная гипотеза обеспечивает простоту получаемых разрешающих уравнений, однако существенно сужает область практического применения получаемых решений.

Дело в том, что разность радиусов, используемых в гражданском машиностроении для конструирования, в частности, ходовых посадок значительно превосходят указанную выше гипотезу из-за относительно больших допусков на отклонение от идеальной геометрической формы взаимодействующих деталей. В инженерии действует простой геометрический принцип: чем больше допуск на отклонение от идеальной формы взаимодействующих деталей, тем больше должен быть зазор в ходовой посадке или подшипнике, для того, чтобы обеспечить подвижность тел друг относительно друга при действии нагрузки. Соответственно, решения, полученные с использованием гипотезы о малости зазора по отношению к радиусу поверхности внедрения [3-6], могут быть применены только в очень узком сегменте конструирования точных или сверхточных механизмов.

В данной работе впервые поставлена и решена задача о внутреннем контакте тел с круговыми границами с учетом большой разности ра-

диусов инденторов и радиусов поверхностей покрытий, а также произвольной глубины внедрения в покрытие. Кроме того, предложен метод теоретического предсказания величины износа сопряжений твердых тел с круговыми границами, а также в качестве примера решены контактные задачи с учетом абразивного износа композиционного покрытия. В работе также без вывода приведены заключительные формулы, определяющие абразивный износ вязкоупругого однородного покрытия цилиндрического подшипника скольжения или шаровой опоры.

Основные гипотезы, используемые в модели Винклера для расчета контактных напряжений и контактной жесткости цилиндрических подшипников скольжения. Предполагается, что радиус цилиндрической полости в недеформируемом пространстве равен $R + h$, где R – внутренний радиус поверхности деформируемого покрытия постоянной толщины h (рис. 1). Начало цилиндрической системы координат полости совпадает с началом декартовой системы и связано с центром цилиндрической полости. Ось цилиндрической системы координат совпадает с осью Oz декартовой системы координат. В цилиндрическую полость радиуса R вставлен абсолютно жесткий цилиндр радиуса r (рис. 1). Введем дополнительное обозначение разности радиусов $e = R - r$.

Отклонения поверхности деформируемого слоя от правильного цилиндра радиуса R малы в сравнении с глубиной внедрения δ жесткого цилиндрического индентора радиуса r . Будем предполагать, что глубина рассматриваемой модели вдоль направления Oz равна 1 [6].

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями высотой h с постоянным квадратным сечением вершины $\Delta \times \Delta$, находящейся на цилиндрической поверхности покрытия (рис. 1). Стержни могут деформироваться только в радиальном направлении $\rho(\varphi)$, связанном с центром цилиндрического выреза и фиксированным направлением φ , откладываемым от вертикальной оси Ox . При

этом, напряженно-деформированное состояние стержней является однородным в поперечном к направлению $\rho(\varphi)$ сечении. Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с размером $\min\{2\alpha_0 \cdot r, 1\}$ области контакта, где α_0 – раствор угла области контакта (рис. 1).

При сделанных предположениях задача сводится к решению плоской геометрической задачи внедрения круга в полосу постоянной толщины на круглом вырезе в плоскости xOy (рис. 1). Учитывая симметрию задачи относительно оси Ox (трение не рассматривается), достаточно сформулировать краевое условие по перемещениям в области контакта для правой полуплоскости плоской модели рисунка (т.е. когда $y \geq 0$ и $\varphi \in [0, \alpha_0]$) [6].

В отличие от предыдущей публикации [6], в которой для углов выполняется приближенное равенство $\varphi \approx \psi$ в силу малости e/R , в данном исследовании необходимо найти функциональную связь между этими двумя углами.

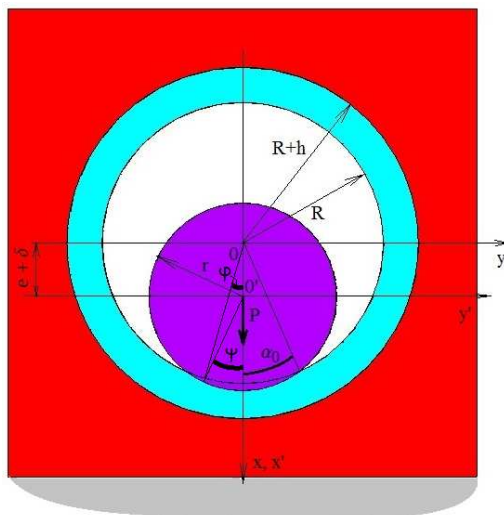


Рис. 1. Плоская краевая задача для сечения перпендикулярного оси цилиндрического отверстия

Следуя монографии [4], запишем, но в более обобщенном виде, чем в первоисточнике, уравнение для проекций координат точек из области контакта на ось Ox :

$$R \cos(\varphi) = e + \delta + r \cos(\psi). \quad (1)$$

Очевидно, если предположить в (1), что $(e + \delta)/r$ – пренебрежимо мало, то получаем случай $\varphi \approx \psi$ [3-7]. Далее не будем делать никаких дополнительных предположений, т.е. будем использовать следующее уравнение для определения угла ψ через угол φ :

$$\psi(\varphi) = \arccos\left(\frac{R \cos(\varphi) - (e + \delta)}{r}\right). \quad (2)$$

Рассмотрим шар радиуса r , внедряемый в покрытие толщиной h на шаровидной полости радиуса $R + h$ в недеформируемом пространстве. Будем использовать сферическую систему координат. Используя гипотезу о деформируемости покрытия только в радиальном направлении, связанном с углом φ , заменим покрытие стержнями с сечением $\Delta \times \Delta$, где $\Delta \ll 2\alpha_0 \cdot r$. Очевидно, можно прийти к решению плоской задачи для сечения в плоскости меридиана системы шаровидных тел (рис. 2) [6].

Краевое условие по перемещениям для обеих контактных задач. Вывод краевого условия по перемещениям начнем с параметрического уравнения правой границы внедрения покрытия в системе координат x_0y_0 :

$$\begin{cases} x_0(\varphi) = R \cos(\varphi), \\ y_0(\varphi) = R \sin(\varphi), \end{cases} \quad (3)$$

где $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Уравнение правой границы внедряемого полукруга имеет совершенно аналогичный вид в системе координат x_0y_0 :

$$\begin{cases} x_1(\psi) = r \cos(\psi) + (e + \delta), \\ y_1(\psi) = r \sin(\psi), \end{cases} \quad (4)$$

где $\psi \in [0, \pi/2]$.

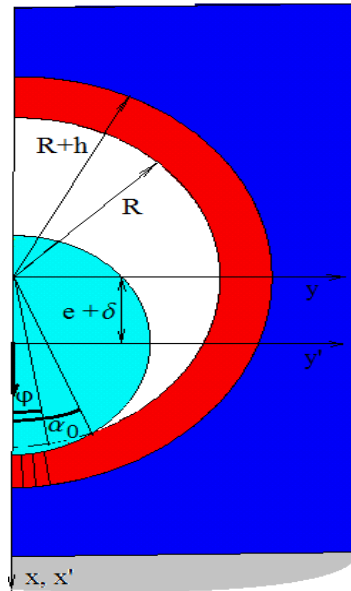


Рис. 2. Геометрическая постановка задачи для радиального сечения в плоскости меридиана шаровидных индентора и полости с покрытием

Геометрическое краевое условие для нормальных радиальных перемещений для обеих плоских контактных задач (рис. 1, 2) при сделанных предположениях имеет вид:

$$v_n(\varphi) = \begin{cases} (x_1(\psi(\varphi)) - x_0(\varphi))\cos(\varphi) + (y_1(\psi(\varphi)) - y_0(\varphi))\sin(\varphi), \varphi \in [0, \alpha_0), \\ 0, \varphi \notin [0, \alpha_0). \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя (2)-(4) в (5), окончательно получаем:

$$v_n(\varphi) = \begin{cases} r \left(\cos \left(\arccos \left(\frac{R \cos(\varphi) - (e + \delta)}{r} \right) \right) \cos(\varphi) + \right. \\ \left. + \sin \left(\arccos \left(\frac{R \cos(\varphi) - (e + \delta)}{r} \right) \right) \sin(\varphi) \right) - R + (e + \delta) \cos(\varphi), & \varphi \in [0, \alpha_0), \\ 0, \varphi \notin [0, \alpha_0). \end{cases} \quad (6)$$

Используя гипотезу о малости $(e + \delta)/r$, можно получить известное краевое условие по перемещениям [5-7].

Очевидно, из геометрических соображений и допущений, используемых при построении обобщений модели Винклера, что глубина внедрения δ определяется исходя из нелинейного уравнения $v_n(\alpha_0) = 0$ по заданному углу α_0 и радиусам R, r :

$$\begin{aligned} & r \left(\cos \left(\arccos \left(\frac{R \cos(\alpha_0) - (e + \delta)}{r} \right) \right) \right) \cos(\alpha_0) + \\ & + \sin \left(\arccos \left(\frac{R \cos(\alpha_0) - (e + \delta)}{r} \right) \right) \sin(\alpha_0) + \delta \cos(\alpha_0) = . \quad (7) \\ & = R - e \cos(\alpha_0) \end{aligned}$$

Подчеркнем, что уравнение (7) позволяет решить контактную задачу как для любых сочетаний геометрических характеристик взаимодействующих тел (радиусы R, r), так и больших глубин внедрения δ , характерных для биологических объектов.

Формальное определение напряжений в области контакта без учета временных эффектов. Относительное укорочение длины $\varepsilon_n(\varphi)$ каждого деформируемого в радиальном направлении элемента, замещающего покрытие, определяется соотношением:

$$\varepsilon_n(\varphi) = \frac{-v_n(\varphi)}{h}, \quad \varphi \in [0, \alpha_0]. \quad (8)$$

Тогда, соответственно, контактные напряжения $\sigma_n(\varphi)$ связаны с деформациями $\varepsilon_n(\varphi)$ соотношением:

$$\sigma_n(\varphi) = \mathfrak{Z}(\varepsilon_n(\varphi)) = \mathfrak{Z} \left(\frac{-v_n(\varphi)}{h} \right), \quad \varphi \in [0, \alpha_0], \quad (9)$$

где $\mathfrak{Z}(\)$ – произвольная функция, определяющая уравнение состояния в том числе для композиционных покрытий [8].

Уравнения равновесия диска и шара на границе деформируемого слоя без учета временных эффектов. Интегральная нагрузка, вызывающая погружение цилиндра в деформируемое покрытие на цилиндрической полости на глубину δ , определяется соотношением [6]:

$$P = -2R \int_0^{\alpha_0} \sigma_n(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi. \quad (10)$$

Уравнение равновесия шара на границе деформируемого слоя имеет вид [6]:

$$P = -2\pi \cdot R^2 \int_0^{\alpha_0} \sigma_n(\varphi) \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi. \quad (11)$$

Общие замечания о постановке и решении задач с износом в механике твердого тела. Известно, что интенсивность изнашивания поверхностей твердых тел связана с коэффициентом трения [9]. Тогда, для решения задачи с учетом изнашивания сначала необходимо решить краевую задачу с заданным трением в области контакта и только после этого переходить к решению интересующей нас краевой задачи с учетом изнашивания. Однако, в подавляющем большинстве практически важных случаев такого усложнения краевых условий не требуется.

Дело в том, что при значениях коэффициента трения скольжения меньше 0,3, оно не вносит существенного изменения в распределение нормальных контактных напряжений [10; 11]. Поэтому, используя найденные контактные напряжения из обычной задачи без учета трения на границе и коэффициент трения скольжения для выбранной пары материалов, можно перейти непосредственно к решению задачи изнашивания, предполагая, что касательные контактные напряжения по закону Амонтона пропорциональны нормальным контактным напряжениям [5; 12].

Учет изнашивания контактирующих элементов в изменении напряженно-деформированном состоянии слоя. Краевое условие по перемещениям для обеих контактных задач. Перейдем к рассмотрению изнашивания покрытия. Сила величиной P приложена к индентору. Она действует на абсолютно жесткий индетор (цилиндр или шар) вертикально вниз вдоль оси Ox . Раствор угла контакта $\alpha_0(t)$ является не убывающей функцией при $t \in [0, t_0]$, где t_0 – длительность испытаний на износостойкость. Таким образом, рисунки 1 и 2 остаются справедливыми и для случая изнашиваемости деформируемого слоя с точностью до замены на них α_0 и δ на $\alpha_0(t)$ и $\delta(t)$.

В данном разделе рассматривается установившийся износ стержней, моделирующих покрытие. При износе предполагается, что изменение длины стержней, моделирующих покрытие происходит так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая [5], т.е. масса-инерционные характеристики призматических стержней (рис. 1, 2) не оказывают влияния на характер их деформирования и изнашивания. Время внедрения индентора на глубину $\delta(0)$ пренебрежимо мало по сравнению со временем измерений, это позволяет предположить, что $\delta(0)$ является мгновенной величиной.

Будем предполагать, что изнашивание покрытия для цилиндрического подшипника скольжения обусловлено равномерным вращением вокруг собственной оси Oz' вставленного в полость цилиндра (рис. 1). Изнашивание же покрытия шаровой опоры происходит благодаря вращению шарового индентора вокруг оси Ox (линии действия силы) (рис. 2).

Будем предполагать, что скорость изнашивания в каждой точке контакта $\partial \frac{v_n(\varphi, t)}{\partial t}$ пропорциональна контактному напряжению в некоторой степени β [5]:

$$\partial \frac{v_{n,uzH}(\varphi, t)}{\partial t} = A \left(\frac{|\sigma_n(\varphi, t)|}{\sigma_{n,эм}} \right)^\beta, \quad (12)$$

где A , $\sigma_{n,эм}$, β ($A > 0$, $\beta > 0$) – константы, устанавливаемые экспериментально, в которых, в частности, учитывается и коэффициент трения, чистота поверхности, режим смазки. Отметим, что при $\beta = 1$ с помощью (12) описывается абразивный и в некоторых случаях усталостный износ [12].

Перейдем непосредственно к рассмотрению геометрического краевого условия по перемещениям $v_n(\varphi, t)$, зависящим от времени в случае изнашивания (рис. 1, 2) [2; 5]:

$$v_n(\varphi, t) = \begin{cases} r \left(\cos \left(\arccos \left(\frac{R \cos(\varphi) - (e + \delta(t))}{r} \right) \right) \cos(\varphi) + \right. \\ \left. + \sin \left(\arccos \left(\frac{R \cos(\varphi) - (e + \delta(t))}{r} \right) \right) \sin(\varphi) \right) - R + \\ \left. + (e + \delta(t)) \cos(\varphi) - v_{n,uzH}(\varphi, t), \varphi \in [0, \alpha_0(t)], \right. \\ \left. 0, \varphi \notin [0, \alpha_0(t)]. \right. \end{cases} \quad (13)$$

где $\alpha_0(t)$ – зависимость раствора угла области контакта от времени, $\delta(t)$ – зависимость глубины внедрения индентора от времени. В (13) отрицательный знак перед $v_{n,uzH}(\varphi, t)$ свидетельствует о том, что данное перемещение рассматривается как геометрическая корректировка кругового профиля покрытия в плоском сечении, при фиксированной величине $\delta(t)$ общего смещения центра. Эта корректировка приводит к уменьшению деформации и соответственно напряжений в области контакта при одном и том же значении смещения центра без учета и с учетом изнашивания покрытия.

Исходя из естественных физических соображений на границе области контакта, изнашивание отсутствует (т.е. $v_{n,uzH}(\alpha_0(t), t) = 0$) из-за ра-

венства нулю нормальных напряжений, то уравнение, определяющее связь глубины внедрения $\delta(t)$, раствора угла области контакта $\alpha_0(t)$ совпадает до переобозначений с (7):

$$r \left(\cos \left(\arccos \left(\frac{R \cos(\alpha_0(t)) - (e + \delta(t))}{r} \right) \right) \cos(\alpha_0(t)) + \right. \\ \left. + \sin \left(\arccos \left(\frac{R \cos(\alpha_0(t)) - (e + \delta(t))}{r} \right) \right) \sin(\alpha_0(t)) \right) + \\ + \delta(t) \cos(\alpha_0(t)) = R - e \cos(\alpha_0(t)). \quad (14)$$

Относительное укорочение длины $\varepsilon_n(\varphi, t)$ каждого деформируемого в радиальном направлении элемента, замещающего покрытие, определяется соотношением (8) [6]:

$$\varepsilon_n(\varphi, t) = \frac{-v_n(\varphi, t)}{h}, \quad \varphi \in [0, \alpha_0(t)]. \quad (15)$$

Тогда, соответственно, контактные напряжения $\sigma_n(\varphi, t)$ связаны с деформациями $\varepsilon_n(\varphi, t)$ соотношением (9) [6; 8]:

$$\sigma_n(\varphi, t) = \mathfrak{Z}(\varepsilon_n(\varphi, t)) = \mathfrak{Z} \left(\frac{-v_n(\varphi, t)}{h} \right), \quad \varphi \in [0, \alpha_0(t)]. \quad (16)$$

Сравнивая (15), (16) с (8) и (9) можно отметить, что относительное укорочение каждого элемента, а, следовательно, и напряжение на нем в области контакта будет уменьшаться из-за износа. Кроме того, область контакта будет увеличиваться при постоянно действующей нагрузке.

Уравнения равновесия для цилиндрического подшипника скольжения и шаровой опоры с учетом износа совпадают с уравнениями (10) и (11) с точностью до замены α_0 и $\sigma_n(\varphi)$ на $\alpha_0(t)$ и $\sigma_n(\varphi, t)$.

Пример решения задачи абразивного изнашивания упругого композиционного защитного покрытия цилиндрического подшип-

ника скольжения с малым зазором. При действующей гипотезе о том, что $(e + \delta(t))/r$ мало, из (13) получаем краевое условие по перемещениям для сечения перпендикулярно оси цилиндрического подшипника скольжения:

$$v_n(\varphi, t) = \begin{cases} \delta(t)\cos(\varphi) - e(1 - \cos(\varphi)) - v_{n,uzH}(\varphi, t), & \varphi \in [0, \alpha_0(t)], \\ 0, & \varphi \notin [0, \alpha_0(t)]. \end{cases} \quad (17)$$

Из (14) получаем:

$$\delta(t) = e \frac{(1 - \cos(\alpha_0(t)))}{\cos(\alpha_0(t))}. \quad (18)$$

Из (15), (17) и (18) следует

$$\varepsilon_n(\varphi, t) = -\frac{e(1 - \cos(\alpha_0(t)))\cos(\varphi)}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} + \frac{e}{h}(1 - \cos(\varphi)) + \frac{v_{n,uzH}(\varphi, t)}{h}. \quad (19)$$

Из (16) и (19) для упругого композиционного покрытия [8] следует:

$$\langle \sigma_n(\varphi, t) \rangle = -\langle E \rangle_X \left[\frac{e(1 - \cos(\alpha_0(t)))\cos(\varphi)}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} - \frac{e}{h}(1 - \cos(\varphi)) - \frac{v_{n,uzH}(\varphi, t)}{h} \right], \quad (20)$$

где

$$\langle E \rangle_X = \frac{1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k \right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k}}{2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k}},$$

E_k – модули упругости компонент композиционного материала, γ_k – относительная объемная доля k-ой компоненты композиционного материала.

Учитывая (12), из (20) получаем:

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_n(\varphi, \tau) \rangle - \langle E \rangle_X \frac{A}{h} \int_0^t \left(\frac{|\langle \sigma_n(\varphi, \tau) \rangle|}{\sigma_{n,эм}} \right)^\beta d\tau = \\ & = -\langle E \rangle_X \left[\frac{e(1 - \cos(\alpha_0(t))) \cos(\varphi)}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} - \frac{e}{h} (1 - \cos(\varphi)) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21), учитывая, что $\beta = 1$ (предположение об абразивном износе в начале пункта), $|\langle \sigma_n(\varphi, t) \rangle| = -\langle \sigma_n(\varphi, t) \rangle$, умножая левую и правую части на $2 \cdot R \cdot \cos(\varphi)$, и интегрируя по φ на отрезке $[0, \alpha_0(t)]$ получаем:

$$\begin{aligned} & -P - \langle E \rangle_X \frac{A}{h \cdot \sigma_{n,эм}} \cdot 2 \cdot R \int_0^{\alpha_0(t)} \left[\int_0^t \langle \sigma_n(\varphi, \tau) \rangle \cdot \cos(\varphi) d\tau \right] d\varphi = \\ & = -\langle E \rangle_X 2 \cdot R \cdot \int_0^{\alpha_0(t)} \left[\frac{e(1 - \cos(\alpha_0(t))) \cos(\varphi)}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} - \frac{e}{h} (1 - \cos(\varphi)) \right] \cos(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (22)$$

Меняя порядок интегрирования в левой части (22) и вычисляя интеграл в правой части (22), окончательно получаем нелинейное уравнение для определения $\alpha_0(t)$ с учетом процесса износа:

$$\begin{aligned} & P \cdot \left(1 + \langle E \rangle_X \frac{A}{h \cdot \sigma_{n,эм}} t \right) = \\ & = \langle E \rangle_X R \cdot \frac{R - r}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} (\alpha_0(t) - \cos(\alpha_0(t)) \sin(\alpha_0(t))). \end{aligned} \quad (23)$$

Абразивное изнашивание упругого композиционного защитного покрытия шаровой опоры с малыми зазорами. Как и в предыдущем случае, формальное распределение нормальных контактных напряжений $\langle \sigma_n(\varphi) \rangle$ определяется формулой (20). Однако в данном случае нам

необходимо умножить (21) на $2\pi \cdot R^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)$ и использовать (11), т.к. решается задача для шаровой опоры. В итоге получаем:

$$P \cdot \left(1 + \langle E \rangle_X \frac{A}{h \cdot \sigma_{n,эм}} t \right) = \frac{4}{3} \pi \cdot R^2 \langle E \rangle_X \frac{R-r}{h \cdot \cos(\alpha_0)} (2 + \cos(\alpha_0)) \cdot \sin^4 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right). \quad (24)$$

Как и в предыдущем примере, при решении задачи необходимо предварительно задать величину действующей нагрузки P , модули упругости E_k и относительные объемные доли γ_k всех компонент композиционного материала, толщину покрытия h , радиус вала r и радиус отверстия R , и, решив нелинейное уравнение (24), определить раствор области контакта $\alpha_0(t)$ для заданного времени t . Контактное напряжение для данной шаровой опоры $\forall \varphi \in [0, \alpha_0(t))$, как и в предыдущем случае, определяется по формуле (21). Основным отличием от уравнения (23) предыдущего примера является структура уравнения (24), решение которого дает иной раствор угла области контакта $\alpha_0(t)$ для одного и того же заданного времени t . Это приводит к иным значениям максимального нормального контактного напряжения $\langle \sigma_n(0, t) \rangle$.

Замечания к решенным примерам. Следует отметить, что (23) и (24) по своей структуре близки к уравнениям (18) и (20) работы [6], полученных для вязко-упругого однородно-стареющего покрытия. Это подтверждает корректность известного в трибологии способа моделирования изнашивания с помощью уравнений ползучести [5].

Уравнения (23) и (24) могут быть использованы для приближенного определения $\alpha_0(t)$ и при $\beta \neq 1$. Далее полученные значения $\alpha_0(t)$ используются для определения нормальных контактных напряжений с помощью уравнения (21).

Очевидно, что совместное решение задачи ползучести и абразивного износа однородного вязкоупругого покрытия цилиндрического подшипника скольжения при действии постоянной силы P и предположении о малости отношения $(e + \delta(t))/r$ приведет к уравнению для определения угла раствора области контакта $\alpha_0(t)$ [6]:

$$P \cdot \left(1 + E \frac{A}{h \cdot \sigma_{n,эм}} t \right) + P \left(1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right) = \\ = E \cdot R \cdot \frac{R-r}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} (\alpha_0(t) - \cos(\alpha_0(t)) \sin(\alpha_0(t))),$$

где E – модуль упругости вязкоупругого покрытия; $\Gamma(t, \tau)$ – ядро ползучести покрытия.

Для абразивного износа однородного вязкоупругого покрытия шаром шаровой опоры при тех же геометрических гипотезах уравнение примет несколько более сложный вид [6]:

$$P \cdot \left(1 + E \frac{A}{h \cdot \sigma_{n,эм}} t \right) + P \left(1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right) = \\ = \frac{4}{3} \pi \cdot R^2 \cdot E \cdot \frac{R-r}{h \cdot \cos(\alpha_0)} (2 + \cos(\alpha_0)) \cdot \sin^4 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right).$$

Выводы. Впервые поставлена и решена задача о внутреннем контакте тел с круговыми границами с учетом большой разности радиусов инденторов и радиусов поверхностей внедрения.

Предложен метод теоретического предсказания величины износа сопряжений твердых тел с круговыми границами.

В качестве примера решены контактные задачи с учетом абразивного износа композиционного покрытия.

Список использованных источников

1. Демкин Н.Б., Рыжов Э.В. Качество поверхности и контакт деталей машин. М.: Машиностроение, 1981. 244 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
3. Гафнер С.Л., Добычин М.Н. К расчету угла контакта при внутреннем соприкосновении цилиндрических тел, радиусы которых почти равны // Машиностроение. 1973. № 2. С. 69-73.
4. Панасюк В.В., Теплый М.Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. Киев: Наук. думка, 1975. 193 с.
5. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Минск: Технопринт, 2000. 196 с.
6. Кравчук А.С., Чижик С.А., Мищак А. Метод определения нормального перемещения в области контакта цилиндрических подшипников скольжения, а также шаровых опор и наконечников с защитным слоем с учетом механических и реологических характеристик его материала // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 4. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/4-2014/Kravchuk-Chizhik-Mischak.pdf>
7. Левина З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. М.: Машиностроение, 1971. 264 с.
8. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Применение простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины в механике твердого тела // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 1. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>
9. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчета на трение износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.

10. Добычин М.Н., Гафнер С.Л. Влияние трения на контактные параметры вал-втулка // Сборник: Проблемы трения и изнашивания. Киев: Техника, 1976. № 3. С. 30-36.
11. Теплый М.И. Определение износа в паре трения вал-втулка // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 2. С. 249-257.
12. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.