

УДК 539.3

**МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ
В ОБЛАСТИ КОНТАКТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОДШИПНИКОВ
СКОЛЬЖЕНИЯ, А ТАКЖЕ ШАРОВЫХ ОПОР И НАКОНЕЧНИКОВ
С ЗАЩИТНЫМ СЛОЕМ С УЧЕТОМ МЕХАНИЧЕСКИХ
И РЕОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕГО МАТЕРИАЛА***

Кравчук Александр Степанович

д-р физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

Чижик Сергей Антонович

д-р тех. наук

Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси
Минск (Беларусь)

Мищак Анджей

д-р тех. наук

Морская академия в Гдыне, Гдыня (Польша)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. На примере решения контактных задач для цилиндрических подшипников скольжения, а также шаровых опор и наконечников с покрытием постоянной толщины предлагается естественное обобщение модели основания Винклера на наиболее распространенные в механике, биомеханике и инженерии случаи жестких криволинейных подстилающих поверхностей, на которые наносится деформируемое защитное покрытие. Рассмотрены особенности решения контактных задач с учетом реологических свойств покрытий. Изложение статьи построено таким образом, что исследователь может не ограничивать себя рамками линейной модели Винклера, а использовать практически любые уравнения состояния материала покрытия, в том числе учитывающих его неоднородный состав.

Ключевые слова: основание Винклера; линейно-деформируемый материал; нелинейно-деформируемый материал; композиционный материал; слоистый материал; ползучесть.

* Исследования выполнены в соответствии с проектом 7 рамочной программы ЕС (Grant Agreement Number: PIRSES-GA-2013-612593).

METHOD FOR DETERMINING THE NORMAL DISPLACEMENT IN CONTACT OF CYLINDRICAL SLIDING BEARINGS, BALL SUPPORTS AND TIPS WITH A PROTECTIVE LAYER WHICH TAKES INTO ACCOUNT MECHANICAL AND RHEOLOGICAL CHARACTERISTICS OF MATERIAL OF COATING

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Chizhik Sergey Antonovich

doctor of engineering sciences
A.V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute, Minsk (Belarus)

Miszczak Andrzej

doctor of engineering sciences
Akademia Morska w Gdyni, Gdynia (Poland)

Abstract. On the base of examples of solving of contact problems for cylindrical sliding bearings, ball supports and tips which have layer with constant thickness are proposed natural generalization of the Winkler foundation on the most used cases of underlying rigid curved surfaces coated by deformable protective layer. The features of the solution of contact problems take into account the rheological properties of the coatings. Narration of the article is constructed so that a researcher cannot limit yourself by the linear model of Winkler but can use almost any equation of state of the coating material, including with heterogeneous composition.

Key words: Winkler base; linearly deformable material; nonlinear deformable material; composite material; laminate material; creep.

Введение. Наиболее интересным с точки зрения приложений является случай взаимодействия жесткого цилиндра или шара с покрытием постоянной толщины на цилиндрической или соответственно сферической полости в недеформируемом пространстве. Эти задачи являются моделями подшипников скольжения или шаровых опор и наконечников, имеющих защитные (в частности антифрикционные) покрытия.

Кроме того, эти задачи, могут стать основой расчета жесткости сочленений (искусственных суставов) в ортопедии.

Основные гипотезы, используемые для применения модели Винклера для расчета контактных напряжений и контактной жесткости цилиндрических подшипников скольжения. Предполагается, что радиус цилиндрической полости в жестком пространстве равен $R + h$, где R – радиус поверхности деформируемого покрытия постоянной толщины h . Начало цилиндрической системы координат полости совпадает с началом декартовой системы. Ось цилиндрической системы координат совпадает с осью Oz декартовой системы координат. В цилиндрическую полость радиуса R вставлен абсолютно жесткий цилиндр радиуса r (рис. 1). Введем дополнительное обозначение $e = R - r$ ($e \geq 0$, e/R - пренебрежимо малая величина).

Отклонения поверхности деформируемого слоя от правильного цилиндра радиуса R малы в сравнении с глубиной внедрения δ жесткого цилиндрического индентора радиуса r . Будем предполагать, что глубина рассматриваемой модели вдоль направления Oz равна 1 [1-3].

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями высотой h с постоянным квадратным сечением вершины $\Delta x \Delta$, находящейся на цилиндрической поверхности покрытия (рис. 1). Стержни могут деформироваться только в радиальном направлении $\rho(\varphi)$, связанном с центром цилиндрического выреза и фиксированным направлением φ , откладываемым от вертикальной оси Ox . При этом,

напряженно-деформированное состояние стержней является однородным в поперечном $O\rho$ сечении. Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с размером $2\alpha_0 \cdot r$ области контакта, где α_0 – раствор угла области контакта (рис. 1).

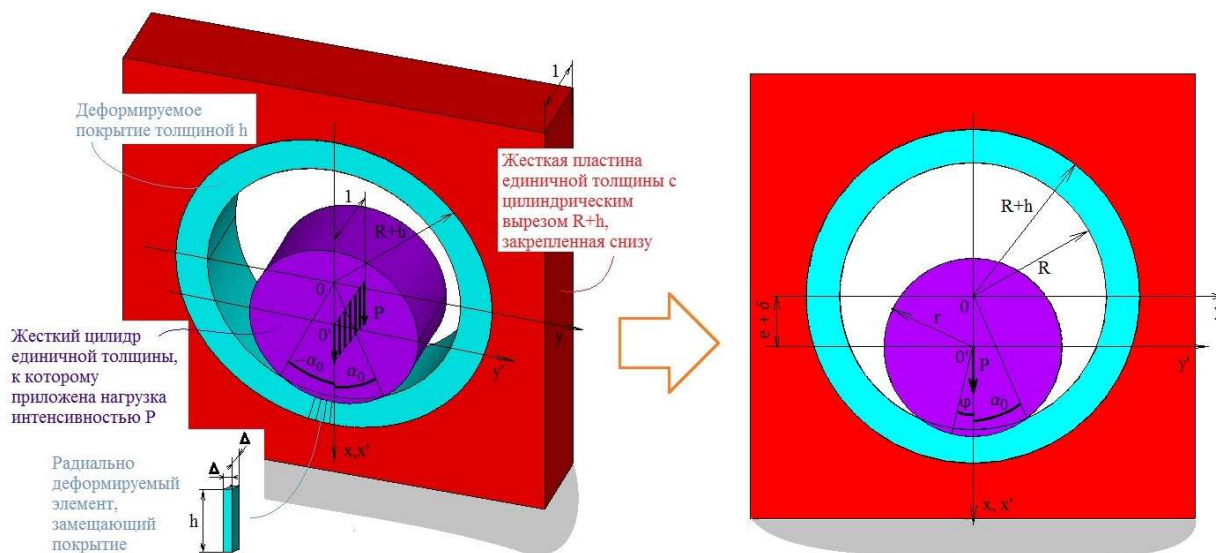


Рис. 1. Редукция пространственной задачи о контакте цилиндра и покрытия на цилиндрической поверхности к плоской краевой задаче для сечения перпендикулярного оси цилиндрического отверстия

При сделанных предположениях задача сводится к решению плоской геометрической задачи внедрения круга в полосу постоянной толщины на круглом вырезе в плоскости xOy (рис. 1). Учитывая симметрию задачи относительно оси Ox (трение не рассматривается), достаточно сформулировать краевое условие по перемещениям в области контакта для правой полуплоскости плоской модели рисунка (т.е. когда $y \geq 0$ и $\varphi \in [0, \alpha_0]$).

Применение гипотез модели Винклера для расчета контактных напряжений и контактной жесткости шаровых опор и наконечников.

Предполагается, что радиус сферической полости в жестком пространстве равен $R + h$, где R – радиус сферической поверхности деформируемого покрытия постоянной толщины h . Начало сферической системы координат полости совпадает с началом вспомогательной глобальной декартовой системы координат. Ось симметрии задачи совпадает с осью Ox декартовой системы координат. В сферическую полость радиуса R вставлен абсолютно жесткий шар радиуса r (рис. 2). Введем дополнительное обозначение $e = R - r$ ($e \geq 0$, e/R – пренебрежимо малая величина) [2].

Отклонения поверхности деформируемого слоя от правильной сферы радиуса R малы в сравнении с глубиной внедрения δ жесткого шаровидного индентора радиуса r .

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями высотой h с постоянным квадратным сечением вершины $\Delta x \Delta$, находящейся на сферической поверхности покрытия радиуса R (рис. 2). Стержни могут деформироваться только в радиальном направлении $\rho(\varphi)$, связанном с центром сферического выреза и фиксированным углом φ , откладываемым от вертикальной оси Ox . При этом, напряженно-деформированное состояние стержней является однородным в поперечном $O\rho$ сечении. Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с размером $2\alpha_0 \cdot r$ области контакта, где α_0 – раствор угла области контакта (рис. 2).

Учитывая особенности постановки задач в осесимметричном случае, достаточно сформулировать краевое условие по перемещениям в области контакта для радиального сечения в плоскости меридиана (т.е. когда $y \geq 0$ и $\varphi \in [0, \alpha_0]$).

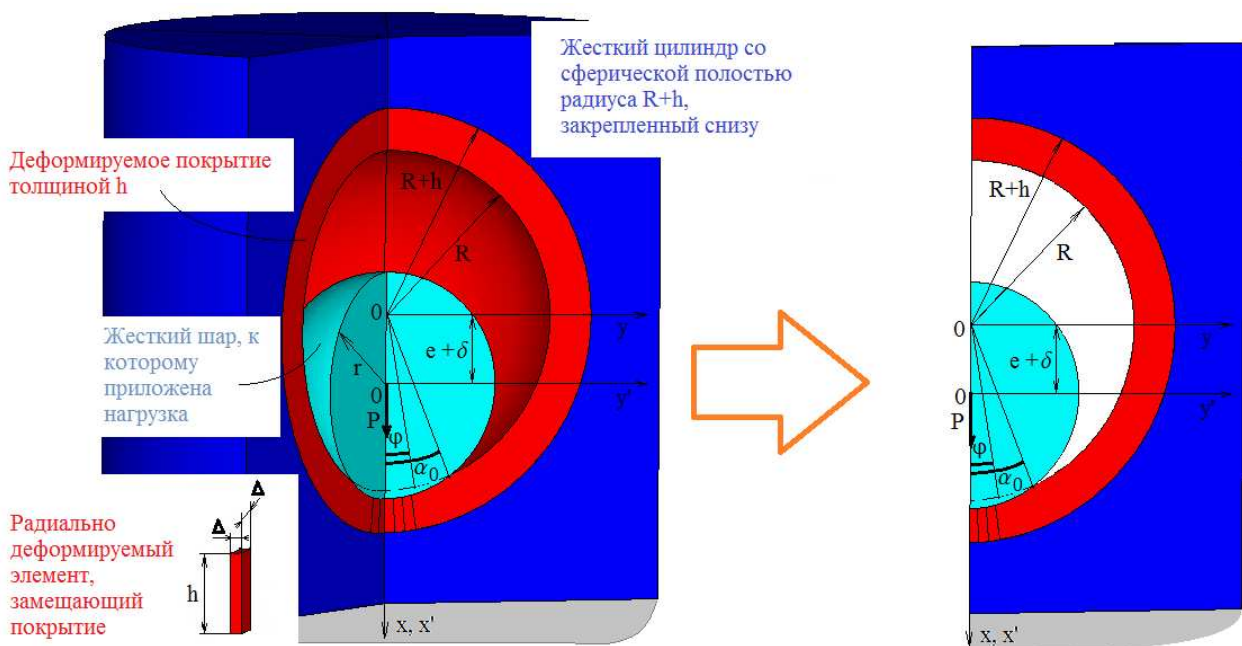


Рис. 2. Редукция пространственной задачи о контакте жесткого шара и деформируемого покрытия на шаровой полости к решению двумерной задачи для радиального сечения тел в плоскости меридиана

Краевое условие по перемещениям для обеих контактных задач. Геометрическое краевое условие для нормальных радиальных перемещений для обеих плоских контактных задач (рис. 1, 2) при сделанных предположениях имеет вид [2, 4]:

$$v_n(\varphi) = \begin{cases} \delta \cos(\varphi) - e(1 - \cos(\varphi)), & \varphi \in [0, \alpha_0), \\ 0, & \varphi \notin [0, \alpha_0). \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, из геометрических соображений и допущений, используемых при построении обобщений модели Винклера, что глубина внедрения определяется выражением:

$$\delta = e \frac{(1 - \cos(\alpha_0))}{\cos(\alpha_0)}. \quad (2)$$

Формальное определение напряжений в области контакта без учета временных эффектов. Относительное укорочение длины $\varepsilon_n(\varphi)$ каждого деформируемого в радиальном направлении элемента, замещающего покрытие, определяется соотношением:

$$\varepsilon_n(\varphi) = \frac{-v_n(\varphi)}{h} = -e \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0)}{h \cdot \cos(\alpha_0)} \quad (3)$$

Тогда, соответственно, контактные напряжения $\sigma_n(\varphi)$ связаны с деформациями $\varepsilon_n(\varphi)$ соотношением:

$$\sigma_n(\varphi) = \mathfrak{Z}(\varepsilon_n(\varphi)) = \mathfrak{Z}\left(-e \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0)}{h \cdot \cos(\alpha_0)}\right), \quad \varphi \in (0, \alpha_0), \quad (4)$$

где $\mathfrak{Z}(\)$ – произвольная функция, определяющая уравнение состояния в том числе для композиционных покрытий [3].

Уравнения равновесия диска и шара на границе деформируемого слоя без учета временных эффектов. Тогда интегральная нагрузка, вызывающая погружение цилиндра в деформируемое покрытие на цилиндрической полости на глубину δ , определяется соотношением:

$$P = -2R \int_0^{\alpha_0} \sigma_n(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \quad (5)$$

Уравнение равновесия шара на границе деформируемого слоя имеет вид:

$$P = -2\pi \cdot R^2 \int_0^{\alpha_0} \sigma_n(\varphi) \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \quad (6)$$

Пример расчета нормального контактного напряжения и контактной жесткости упругого композиционного цилиндрического подшипника скольжения. В работе [3] для композиционного структурно неоднородного покрытия, моделируемого призматическими стержнями, было установлено, что нормальные перемещения и нормальные контактные напряжения связаны соотношением:

$$\langle \sigma_n(\varphi) \rangle = -\langle E \rangle_X \cdot \frac{v_n(\varphi)}{h}, \quad (7)$$

где

$$\langle E \rangle_X = \frac{1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k \right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k}}{2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k}},$$

E_k – модули упругости компонент композиционного материала, γ_k – относительная объемная доля k -ой компоненты композиционного материала.

Подставляя (7) в (5) и интегрируя, получаем уравнение:

$$P = R \cdot \langle E \rangle_X \frac{R-r}{h \cdot \cos(\alpha_0)} (\alpha_0 - \cos(\alpha_0) \sin(\alpha_0)). \quad (8)$$

Таким образом, при решении прямой задачи необходимо предварительно задать величину действующей нагрузки P , модули упругости E_k и относительные объемные доли γ_k всех компонент композиционного материала, толщину покрытия h , радиус вала r и радиус отверстия R , и, решив нелинейное уравнение (8), определить размер области контакта α_0 . Тогда контактное напряжение для данного цилиндрического подшипника $\forall \varphi \in [0, \alpha_0)$ определяется по формуле:

$$\langle \sigma_n(\varphi) \rangle = -\langle E \rangle_X \cdot \frac{R-r}{h \cdot \cos(\alpha_0)} (\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0)). \quad (9)$$

Очевидно, наибольшим контактным напряжением будет являться значение $\langle \sigma_n(0) \rangle$.

В завершении решения задачи по формуле (2) определяется контактная жесткость δ соединения.

Пример расчета контактных напряжений в шаровой опоре со структурно неоднородным композиционным упругим слоем. Как и в предыдущем случае, формальное распределение нормальных контактных напряжений $\langle \sigma_n(\varphi) \rangle$ определяется формулой (7). Однако в данном случае нам необходимо подставить (7) в (6), т.к. мы решаем задачу для шаровой опоры:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \cdot R^2 \langle E \rangle_X \frac{e}{h \cdot \cos(\alpha_0)} \int_0^{\alpha_0} (\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0)) \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} \pi \cdot R^2 \langle E \rangle_X \frac{R-r}{h \cdot \cos(\alpha_0)} (2 + \cos(\alpha_0)) \cdot \sin^4\left(\frac{\alpha_0}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Как и в предыдущем примере, при решении прямой задачи необходимо предварительно задать величину действующей нагрузки P , модули упругости E_k и относительные объемные доли γ_k всех компонент композиционного материала, толщину покрытия h , радиус вала r и радиус отверстия R , и, решив нелинейное уравнение (10), определить размер области контакта α_0 . Контактное напряжение для данного цилиндрического подшипника $\forall \varphi \in [0, \alpha_0)$, как и в предыдущем случае, определяется по формуле (9), контактная жесткость – по формуле (2). Основным отличием от предыдущего примера является уравнение (10).

Его решение дает другой, чем в предыдущем примере раствор угла области контакта α_0 , что приводит к иным значениям максимального нормального контактного напряжения $\langle \sigma_n(0) \rangle$ и иному значению контактной жесткости δ .

Учет временных эффектов в напряженно-деформированном состоянии слоя. Краевое условие по перемещениям для обеих контактных задач. Перейдем к рассмотрению ползучести покрытия. Сила величиной $P(t)$ постоянна или изменяется таким образом, что $\alpha_0(t)$ является не убывающей функцией при $t \in [0, t_0]$, где t_0 – длительность испытаний на ползучесть. Она действует на абсолютно жесткий индетор (цилиндр или шар) вертикально вниз вдоль оси Ox . Таким образом, рисунки 1 и 2 остаются справедливыми и для случая ползучести деформируемого слоя с точностью до замены на них P , α_0 и δ на $P(t)$, $\alpha_0(t)$ и $\delta(t)$.

В данном разделе рассматривается установившаяся ползучесть стержней, моделирующих покрытие. При ползучести предполагается, что деформации покрытия происходят так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая [2, 4], т.е. масса-инерционные характеристики призматических стержней (рис. 1, 2) не оказывают влияния на характер его деформирования. Время внедрения пирамидального индетора на глубину $\delta(0)$ пренебрежимо мало по сравнению со временем измерений, это позволяет предположить, что $\delta(0)$ является мгновенной величиной.

Перейдем непосредственно к рассмотрению геометрического краевого условия по перемещениям $v_n(\varphi, t)$, зависящим от времени в случае ползучести (рис. 1, 2) [2, 5]:

$$v_n(\varphi, t) = \begin{cases} \delta(t) \cdot \cos(\varphi) - e \cdot (1 - \cos(\varphi)), & \varphi \in [0, \alpha_0(t)], \\ 0, & \varphi \notin [0, \alpha_0(t)], \end{cases} \quad (11)$$

где $\alpha_0(t)$ – зависимость раствора угла области контакта от времени,
 $\delta(t)$ – зависимость глубины внедрения индентора от времени.

Глубина внедрения $\delta(t)$ определяется уравнением:

$$\delta(t) = e \frac{1 - \cos(\alpha_0(t))}{\cos(\alpha_0(t))}. \quad (12)$$

Уравнения состояния при ползучести. Относительное укорочение длины $\varepsilon_n(\varphi, t)$ каждого деформируемого в радиальном направлении элемента, замещающего покрытие, определяется соотношением:

$$\varepsilon_n(\varphi, t) = \frac{-v_n(\varphi, t)}{h} = -e \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(t))}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))}. \quad (13)$$

В случае использования наследственной теории ползучести нормальная деформация $\varepsilon_n(\varphi, t)$ связана с нормальным напряжением $\sigma_n(\varphi, t)$ интегральными соотношением с использованием ядра ползучести $\Gamma(t, \tau)$ [5]:

- вязко-упругий однородно стареющий материал слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$:

$$-e \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(t))}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma_n(\varphi, t) + \int_0^t \sigma_n(\varphi, \tau) \Gamma(t, \tau) d\tau \right], \quad (14)$$

- материал слоя, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$\mathfrak{S} \left(-e \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(t))}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} \right) = \sigma_n(\varphi, t) + \int_0^t \sigma_n(\varphi, \tau) \Gamma(t, \tau) d\tau. \quad (15)$$

Отметим, что уравнения равновесия при ползучести покрытия полностью совпадают с уравнениями равновесия (5) и (6) с точностью до замены в уравнениях (5) и (6) $\sigma_n(\varphi)$ на $\sigma_n(\varphi, t)$ и α_0 на $\alpha_0(t)$.

Ползучесть при взаимодействии цилиндра и покрытия на цилиндрической полости. В случае исследования ползучести по заданной силе $P(t)$, мгновенному модулю упругости $E(t)$ или функции $\mathfrak{Z}(\cdot)$, а также ядру ползучести $\Gamma(t, \tau)$ можно определить зависимость раствора угла области контакта от времени $\alpha_0(t)$ по следующей вычислительной схеме:

1. Домножим левую и правую части уравнений (14) и (15) на $-2R \cos(\varphi)$ и проинтегрируем на отрезке $[0, \alpha_0(t)]$:
 - вязко-упругий однородно стареющий материал слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{2R \cdot e}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} \int_0^{\alpha_0(t)} (\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(t))) \cos(\varphi) d\varphi = \\ & = \frac{1}{E(t)} \left[(-2 \cdot R) \int_0^{\alpha_0(t)} \sigma_n(\varphi, t) \cos(\varphi) d\varphi + \right. \\ & \left. + (-2 \cdot R) \int_0^{\alpha_0(t)} \int_0^t \sigma_n(\varphi, \tau) \Gamma(t, \tau) d\tau \cos(\varphi) d\varphi \right], \end{aligned} \quad (16)$$

- материал слоя, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$\begin{aligned}
& -2R \int_0^{\alpha_0(t)} \Im \left(-e^{\frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(t))}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))}} \right) \cos(\varphi) d\varphi = \\
& = \left[(-2 \cdot R) \int_0^{\alpha_0(t)} \sigma_n(\varphi, t) \cos(\varphi) d\varphi + \right. \\
& \left. + \int_0^{\alpha_0(t)} \int_0^t \sigma_n(\varphi, \tau) \Gamma(t, \tau) d\tau \cos(\varphi) d\varphi \right].
\end{aligned} \tag{17}$$

2. Изменим последовательность интегрирования в правой части в соответствии с гипотезой о неубывании $\alpha_0(t)$.
 3. Используем уравнение равновесия (5) для замены выражений в правой части (16) и (17).
 4. В итоге получаем нелинейные уравнения для определения $\alpha_0(t)$ по заданной правой части. Эти уравнения подобны уравнениям в общем виде, приведенным в работе [5]:
- вязко-упругий однородно стареющий материал слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{R \cdot (R - r)}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} (\alpha_0(t) - \cos(\alpha_0(t)) \sin(\alpha_0(t))) = \\
& = \frac{P(t)}{E(t)} \left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right],
\end{aligned} \tag{18}$$

- материал слоя, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$\begin{aligned}
& -2R \int_0^{\alpha_0(t)} \Im \left(-e^{\frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(t))}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))}} \right) \cos(\varphi) d\varphi = \\
& = P(t) \cdot \left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

С помощью полученной функции $\alpha_0(t)$ и уравнения (12) можно получить функцию изменения глубины внедрения $\delta(t)$. В принципе, после определения $\alpha_0(t)$ можно, обратив, например, оператор (14), определить, хотя бы численно, изменение контактных напряжений во времени с помощью выражения [6]:

$$\sigma_n(\varphi, t) = -\frac{(R-r)}{h} \left(E(t) \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(t))}{\cos(\alpha_0(t))} - \int_0^t E(\tau) \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(\tau))}{\cos(\alpha_0(\tau))} \cdot R(t, \tau) d\tau \right),$$

где $R(t, \tau)$ – ядро релаксации. Однако вычисление $R(t, \tau)$ по заданному ядру $\Gamma(t, \tau)$ представляет собой трудоемкую задачу [7], сильно отличающуюся от принятой в механике твердого тела процедуре [6].

Ползучесть шаровых опор и наконечников. Следует отметить, что процесс получения нелинейных уравнений для определения функции $\alpha_0(t)$ полностью совпадает с предыдущим случаем. Изменяется лишь множитель, на который домножаются уравнения (14) и (15). В случае шаровых опор множителем является выражение $-2\pi \cdot R^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)$, а также на третьем шаге преобразований для замены используется уравнение равновесия (6). В итоге получаем следующие два уравнения для определения $\alpha_0(t)$ по заданной правой части:

- вязко-упругий однородно стареющий материал слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$:

$$\frac{4\pi \cdot R^2 \cdot (R - e)}{3 h \cdot \cos(\alpha_0(t))} (2 + \cos(\alpha_0(t))) \sin^4\left(\frac{\alpha_0(t)}{2}\right) =$$

$$= \frac{P(t)}{E(t)} \left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right], \quad (20)$$

- материал слоя, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$-2\pi \cdot R^2 \int_0^{\alpha_0(t)} \Im \left(-e^{\frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(t))}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))}} \right) \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi =$$

$$= P(t) \cdot \left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right].$$

Пример расчета контактного перемещения с учетом ползучести защитного покрытия. В качестве примера возьмем характеристики структурно-неоднородного композиционного вязкоупругого однородно-старееющего материала, вычисленные в работе авторов [5]:

$$\langle E(t) \rangle_X = \frac{1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k(t) \right) \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)}}{2 \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)}},$$

$$\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \cdot \Gamma_k(t, \tau)}{E_k(t)}}{2 \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)}} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Gamma_k(t, \tau),$$

где N – количество материалов в композиции, $E_k(t)$ – мгновенные модули упругости материалов в композиции, γ_k – объемные доли материалов в композиции, $\Gamma_k(t, \tau)$ – ядра материалов в композиции.

Тогда уравнение для определения $\alpha_0(t)$ в случае цилиндрического подшипника скольжения будет иметь вид (18):

$$\frac{R \cdot (R - r)}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} (\alpha_0(t) - \cos(\alpha_0(t)) \sin(\alpha_0(t))) = \frac{P(t)}{\langle E(t) \rangle_X} \left[1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right]. \quad (21)$$

Для шаровой опоры искомое уравнение примет более громоздкий вид (20):

$$\frac{4 \pi \cdot R^2 \cdot (R - e)}{3 h \cdot \cos(\alpha_0(t))} (2 + \cos(\alpha_0(t))) \sin^4\left(\frac{\alpha_0(t)}{2}\right) = \frac{P(t)}{\langle E(t) \rangle_X} \left[1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right]. \quad (22)$$

По результатам решения (21) и (22) определяются $\delta(t)$ (в каждом случае отдельно) с помощью формулы (12). Очевидно, исходя из статьи авторов [5], что если часть $\Gamma_k(t, \tau) = 0$, и соответствующие им $E_k(t) = const$, то в этом случае будет решаться контактная задача для метал-полимерного покрытия.

Выводы.

Предложен метод определения нормального перемещения в области контакта цилиндрических подшипников скольжения, а также шаровых опор и наконечников с защитным слоем с учетом механических и реологических характеристик его материала.

В качестве примера решены контактные задачи для композиционных слоев или покрытий в цилиндрических подшипниках, а также шаровых опорах и наконечниках без учета временных эффектов.

Решены задачи ползучести метал-полимерных композиционных защитных слоев в цилиндрических подшипниках скольжения, а также шаровых опорах и наконечниках без учета временных эффектов.

Очевидно, что если в области контакта присутствуют симметричные вырезы, то в этом случае предложенный подход при моделировании указанных конструкций может быть так же эффективно применен.

Список использованных источников

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
2. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Минск: Технопринт, 2000. 196 с.
3. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Применение простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины в механике твердого тела // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 1. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>
4. Левина З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. М.: Машиностроение, 1971. 264 с.
5. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Моделирование ползучести по наследственной теории в простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 2. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>
6. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
7. Антоневи́ч А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн.: Из-во «Университетское», 1984. 351 с.