УДК 621.001.5:331.01

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАШИНОСТРОЕНИЯ И ПЛАНИРОВАНИЕ ИХ МОДЕРНИЗАЦИИ С УЧЁТОМ СРОКА МОРАЛЬНОГО СТАРЕНИЯ

Ташевский Арнольд Германович

д-р тех. наук
Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого, Санкт-Петербург

author@apriori-journal.ru

Аннотация. В статье рассмотрены вариативные оценки динамики технического уровня (ТУ) технологических систем машиностроения, параметры которых определяются по ретроспективной информации. Предлагаемые решения позволяют получить прогноз периода морального старения технологической системы и определить целесообразные сроки ее замены или модернизации.

Ключевые слова: технический уровень; технологическая система; жизненный цикл; моральное старение; статистическое моделирование; метод случайного блуждания; характеристические параметры технического прогресса.

QUALITY EVALUATION OF TECHNOLOGICAL SYSTEMS ENGINEERING AND PLANNING WITH THE MODERNIZATION OF MORAL AGING

Tashevsky Arnold Germanovich

doctor of technical sciences
St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great, St. Petersburg

Abstract. The article considers variable assessments of the dynamics of technological level (TL) process systems engineering, the parameters of which are determined by retrospective information. The obtained solutions allow receiving a forecast period of obsolescence of the technological system and to determine the appropriate timing of its replacement or upgrade.

Key words: technological level; technological system; life cycle; obsolescence; statistical modeling; method of random walk; characteristic parameters of technical progress.

Создание и внедрение в производство новых технических объектов с более высоким техническим уровнем порождает процесс морального старения образцов, имеющих аналогичное функциональное назначение и подобные технические параметры. На интенсивность процесса морального старения оказывает влияние уменьшение затрат общественно необходимого продукта.

«Технологический разрыв» – это период перехода от одной технологии к качественно другой (или от одного продукта к качественно другому, удовлетворяющему ту же потребность). Современный этап научно-технической революции характеризуется ростом частоты технологических разрывов.

Задача оценки качества технологических систем и последующего планирования их замены или модернизации является крайне актуальной и тесно связана с задачей учета их срока морального старения.

Сущность морального старения заключается в уменьшении или потере части стоимости (обесценивании) вследствие создания и внедрения в производство новых, более производительных и экономичных изделий.

Исходя из этого, представляется целесообразным за момент морального старения технической системы принять начало разработки нового образца аналогичного назначения.

Процессы развития техники и технологии описываются на базе моделей и методов научно-технического прогнозирования. Особенность построения прогнозных моделей технического уровня состоит в применении методов комплексного анализа динамики показателя качества.

В [3; 10-12] показана возможность использования для этой цели принципа свертывания показателей качества, обеспечивающего переход от «пучка» траекторий развития каждого из показателей качества к обобщенной траектории развития объекта в фазовом пространстве мер качества.

При анализе динамики развития техники важно знать характеристические параметры технического прогресса (годовой темп роста, технического уровня и его годовой темп прироста). В терминах конечных разностей при построении детерминированных моделей обычно используют зависимости

$$\Delta W = W(t)-W(t-1),$$

$$\Delta_2 W = \Delta W(t)-\Delta W(t-1) \tag{1}$$

и описывают динамику технического уровня уравнением

$$W(t) = W(t-1)+ W(t-1)+ \Delta_2 W(t-1).$$

Поступательный характер технического прогресса обусловливает неотрицательные значения темпов роста технического уровня $\Delta W(t) \geq 0$. Вторая ступень изменения показателей технического уровня $\Delta_2 W(t)$ может быть как положительной, так и отрицательной, обусловливая ускорение или замедление развития техники. Полагая, что значение $\Delta_2 W(t)$

на конечный результат оказывает незначительное влияние, приращение технического уровня $\Delta W(t)$ определяют по формуле

$$\Delta W = \Delta W\left(t-1\right) + \overline{\Delta_2 W,} \tag{2}$$

где $\overline{\Delta_2 W}$ – среднегодовой темп роста технического уровня.

В результате анализа прогнозного фона на периоде ретроспекции можно выявить последовательность скачков, совершаемых в случайные моменты времени. Величина скачка показателя качества х1, является случайной величиной, распределенной равномерно на интервале (-а, а).

Заметим, что симметричность интервала не снижает общности рассуждений, а допущение о равномерности распределения скачка представляется целесообразным для коротких динамических рядов. Если считать, что число скачков n на периоде упреждения прогноза является случайным и распределено по закону pn , то характеристическая функция для функции распределения суммы случайного числа случайных величин х будет равна

$$\phi(t)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\sin^n(ta)}{(ta)^n}. \tag{3}$$

В соответствии с формулой обращения запишем формулу для плотности распределения

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{n=1}^{\infty} e^{-itx} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\sin^n(ta)}{(ta)^n} dt. \tag{4}$$

Изменяя порядок суммирования и интегрирования и учитывая симметрию закона распределения, плотность распределения можно представить в виде

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{ll} \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n \frac{n}{2^n}\frac{1}{\alpha} \sum\limits_{0<\kappa<\frac{n}{2}+\frac{x}{2x}}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(n+\frac{x}{a}-2k\right)^{n-1}}{k!\left(n-k\right)!} & \text{при } 0<\frac{x}{a}<n, \\ 0 \qquad \text{при} \qquad n\geq\frac{x}{a}, \frac{x}{a}\geq 2 & \end{array}\right\} \tag{5}$$

В табл. 1 приведены выражения для плотностей распределения для различных условий постановки задачи.

Для повышения точности определения параметров прогнозных моделей при рассмотрении процесса морального старения на участке ретроспекции необходимо учитывать технические системы, замена которых уже произведена и системы, которые еще морально не устарели. С этой целью можно использовать модифицированный метод максимального правдоподобия. Этот метод основывается на предположении, что распределение времени морального старения существующих технических систем и распределение продолжительности жизненного цикла систем, подчинены одному закону $f(t_i, \theta)$, аналитическая форма которого известна, а параметры θ неизвестны.

В этом случае для определения точечных оценок параметров закона распределения используется функция правдоподобия вида

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n_0} \ln f\left(t_i;\theta\right) + \sum_{i=n_0+1}^{n_0+N_0} \ln\left[1 - F\left(t_i,\theta\right)\right], \tag{6}$$

где n_0 и N_0 – соответственно количество морально устаревших и не устаревших систем;

f (ti ,θ); F(ti ,θ) – соответственно плотность распределения и закон распределения времени существования технических систем, определяемых параметром θ, характеризующим технический уровень.

Решение уравнений вида (6) позволяет получить прогноз периода морального старения исследуемого класса технических систем и определить целесообразные сроки их замены или модернизации.

В соответствии с методом максимального правдоподобия оценки параметров закона распределения находят решения уравнений

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0.$$

Таблица 1

Расчетные соотношения для плотности распределения величины *Y*

Закон распределения числа скачков ***n***	Закон распределения величина скачка ***y***	Плотность распределения ***f***(***y***)
Пуассона параметр λ	Нормальный, параметры $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\sigma}^2$	$\sum \frac{\lambda^n \sqrt{n\sigma}}{n!\left(1-e^{-\lambda}\right)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\left[\frac{\left(y-mn\right)^2}{2n}\lambda\right]\right\}$
Пуассона параметр λ	Экспоненциальный, параметр $\boldsymbol{\mu}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\mu\left(\mu x\right)^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\mu x}$
Пуассона параметр λ	Гамма, параметры ***m, k***	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{r\left(ry\right)^{mn-1}}{\Gamma(n)} e^{-ky}$
Пуассона параметр λ	Логнормальный, параметры $\bar{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{\sigma}^2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{\sqrt{2\pi\sigma n!\sqrt{\pi}}} \exp\left\{-\frac{\left[\ln y - \ln(mn)\right]^2}{2n}\right\}$
Пуассона параметр λ	Равномерный [***-a; a***]	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-\lambda}}{an!2n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(n+\frac{y}{a}-2k\right)^{n-1}}{k!(n-k)!}$ $0 < k < \frac{\left(n+\frac{y}{a}\right)}{2}$
Биномиальный параметр ***p***	Нормальный, параметры $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\sigma}^2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n\sigma} C_n^k p^k \left(1-p\right)^{n-k} \exp\left\{-\frac{\left(y-mn\right)^2}{2n}\right\}$
Биномиальный параметр ***p***	Экспоненциальный, параметр $\boldsymbol{\mu}$	$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^k p^k \left(1-p\right)^{n-k} \frac{\mu\left(\mu y\right)^{n-1} e^{-\mu y}}{\Gamma(n)}$
Биномиальный параметр ***p***	Гамма, параметры ***m,k***	$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^k p^k \left(1-p\right)^{n-k} \frac{r\left(ry\right)^{mn-1} e^{-\mu y}}{\Gamma(mn)}$

Применение этого метода рассмотрим на примере нахождения оценок параметров закона Вейбулла, наиболее часто используемого при обработке результатов наблюдений.

Плотность вероятности и функция распределения закона Вейбулла определяются формулами

$$f(x)=\frac{m}{t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{m-1}e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^m};\qquad(7)$$

$$F(x)=1-e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^m},\qquad(8)$$

где m и t_0 – параметры формы и масштаба, соответственно.

Функция правдоподобия с учетом зависимостей (7) и (8) имеет вид:

$$l=\ln L=\sum_{i=1}^{n_0}\ln\left[\frac{m}{t_0}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{m-1}e^{-\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^m}\right]+\sum_{i=n_0+1}^{n_0+N_0}\ln\left[e^{-\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^m}\right].$$

В результате решения уравнений $\frac{\partial l}{\partial t}=0$ и $\frac{\partial l}{\partial m}=0$ после преобразований получаются два соотношения для определения оценок $\hat{m}$ и $\hat{t}_0$ параметров распределения Вейбулла

$$\hat{m}^{-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n_0}t_1^{\hat{m}}\ln t_1+\sum_{j=1}^{n_0}t_j^{\hat{m}}\ln t_j}{\sum_{i=1}^{n_0}t_1^{\hat{m}}+\sum_{j=1}^{n_0}t_j^{\hat{m}}}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0}\ln t_1;\qquad(9)$$

$$\hat{t}=\sqrt[\hat{m}]{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n_0}t_1^{\hat{m}}+\sum_{j=1}^{n_0}t_j^{\hat{m}}\right)}.\qquad(10)$$

Используя зависимость (9), оценку параметра формы m можно найти методом итераций или графическим построением. Подставляя полученное значение $\hat{m}$ в выражение (9) нетрудно найти оценку параметра масштаба $\hat{t}_0$.

В настоящее время особым объектом исследования становятся непараметрические методы оценивания и построения общей теории цензурированных выборок, к наиболее сложным и наименее разработанным вопросам которых относятся методы прикладного статистического анализа малых цензурированных выборок.

Особенность непараметрических методов в отличие от классических методов математической статистики состоит в независимости процедур оценки и проверки статистических гипотез от неизвестного теоретического распределения генеральной совокупности, извлечением из которой получена рассматриваемая выборка. Использование классических (параметрических) методов предполагает, как было показано выше, что неизвестные теоретические распределения принадлежат какому-либо семейству распределений, зависящему от конечного числа параметров.

Для реализации непараметрических методов анализа цензурированных выборок представляется целесообразным использование принципа максимума неопределенности, использование которого позволяет определить новое направление анализа малых выборок.

В основу этого метода может быть положена также идея цензурирования выборки путем замены цензурированного элемента выборки его условным математическим ожиданием.

Раскроем смысл и содержание этого подхода к задаче статистического анализа цензурированной выборки. В наиболее общем случае постановка задачи рецензурирования малой выборки может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $t_{1,}$ $t_2,...,t_n$ независимы и имеют одну и ту же непрерывную (неизвестную) функцию распределения $F(t).$ Положим $t_1^{(n)} \le t_2^{(n)} \ldots \le t_n^{(n)}$, где в вариационном ряду $t_1^{(n)} \le t \ldots \le t_n^{(n)}$ обозначают элементы выборки $t_k(r = 1,..., n)$, расположенные в порядке возрастания $\overline{t}_m^{(n)}$ – цензурированный элемент выборки (случай $\overline{t}_1^{(n)}$ и $\overline{t}_n^{(n)}$ не исключается). Не ограничивая общности, можно сказать, что в выборке лишь один цензурированный элемент. Требуется определить условное математическое ожидание $\mathrm{E}\left[t_m^{(n)} / \overline{t}_m^{(n)} \right]$.

Статистическая интерпретация цензурированных малых выборок в терминах теории порядковой статистики является, в данном случае, наиболее целесообразной. Действительно, распределение порядковой статистики может быть выведено из точного исходного распределения $F(t)$. Однако в условиях малых выборок аналитические свойства исходного распределения редко известны. Это приводит к необходимости использования принципа максимума неопределенности и определения на этой основе экстремального распределения порядковой статистики

$$P\left\{t_m^{(n)} < t)\right\} = F_{mn}(t).$$

Наиболее характерной является ситуация, когда исходное распределение генеральной совокупности $F(t)$ характеризуется математическим ожиданием m и дисперсией σ^2. Поэтому представляется целесообразным в дальнейшем использовать экстремальное распределение порядковой статистики $t_m^{(n)}$. Если найдено распределение генеральной совокупности $F(t)$, доставляющее максимум энтропии на распределении порядковой статистики $t_m^{(n)}$

$$F_{nm}(t) = \int_{{}_m^{(n)}}^{\infty} \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} F^{m-1}(t)\left[1-F(t)\right]^{n-m} f(t)dt,$$

то условное математическое ожидание порядковой статистики определяется следующим образом:

$$E\left[\overline{t}_m^{(n)} / t_m^{(n)}\right] = c\int_{{}_m^{(n)}}^{\infty} tdF_{mn}(t),$$

где $c = \left\{\int_{{}_m^{(n)}}^{\infty} \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} F^{m-1}(t)\left[1-F(t)\right]^{n-m} f(t)dt\right\}^{-1} = \left[1-F_{mn}(\overline{t}_m^{(n)})\right]^{-1}$ – коэффициент нормировки;

$$F_{mn}(\overline{t}_m^{(n)}) = \frac{n!}{m!(m-n)!} F^m(\overline{t}_m^{(n)})\, {}_2F_1(m, m-n; m+1; F(\overline{t}_m^{(n)})).$$

С этой позиции представляется целесообразным перейти к выводу экстремального распределения цензурированной статистики. Изложение будет дано фрагментарно и опираться на решение базовых задач построения моделей экстремальных распределений экстремальных случайных величин, приведенных в [3].

Чтобы найти функцию распределения цензурированной порядковой статистики $t_m^{(n)}$,необходимо решить следующую вариационную задачу

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} f_{mn}(t) \ln f_{mn}(t) dt \to \max, \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1, \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,dt = m_1, \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt = \sigma^2 + m_1^2.$$

Интегрируя уравнение Эйлера-Лагранжа по области задания независимой переменной t с учетом имевшего место цензурирования $t \in (\overline{t}_m^{(n)}, \infty)$ можно показать, что

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 m_1 = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} F(\overline{t}_m^{(n)})^{m-1} \left[1 - F(\overline{t}_m^{(n)})\right]^{m-n} f(\overline{t}_m^{(n)}). \tag{12}$$

Второе конечное соотношение, связывающее множитель Лагранжа с параметрами, характеризующими генеральную совокупность, определяется следующим образом

$$\lambda_1 m_1 + 2\lambda_2 (m_1^2 + \sigma^2) = \int_{(n)}^{\infty} t df_{nm}(t) = t f_{mn}(t)\Big|_{\overline{t}_m^{(n)}}^{\infty} - \int_{F(\overline{t}_m^{(n)})}^{1} dF_{mn}(t) = -\overline{t}_m^{(n)} \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} F^{m-1}(\overline{t}_m^{(n)}) \times$$
$$\times \left[1 - F(\overline{t}_m^{(n)})\right]^{n-m} f(\overline{t}_m^{(n)}) - 1 + \frac{n!}{m!(n-m)!} F^m(\overline{t}_m^{(n)})\, {}_2F_1(m; m-n; m+1; F(\overline{t}_m^{(n)})) \tag{13}$$

Уравнения (12) и (13) однозначно определяют множители Лагранжа через параметры m_1 и σ^2 значения функции распределения $F(\overline{t}_m^{(n)})$ и ее плотности $f(\overline{t}_m^{(n)})$, аргументом которых является цензурированный элемент выборки $\overline{t}_m^{(n)}$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \Bigg\{ 1 - \frac{n!}{m!(n-m)!} F^m(\overline{t}_m^{(n)})\, {}_2F_1(m, m-n; m+1; F(\overline{t}_m^{(n)})) -$$
$$-(m_1 - (\overline{t}_m^{(n)})) \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} F(\overline{t}_m^{(n)}) \left[1 - F^m(\overline{t}_m^{(n)})\right]^{n-m} f(\overline{t}_m^{(n)}) - \tag{14}$$
$$- \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} F^{m-1}(\overline{t}_m^{(n)}) \left[1 - F(\overline{t}_m^{(n)})\right]^{n-m} f\left(\overline{t}_m^{(n)}\right) \Bigg\},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2}\left\{1 - \frac{n!}{m!(n-m)!} F^m(\overline{t}_m^{(n)})_2 F_1(m, m-n; m+1; F(\overline{t}_m^{(n)})) - \right.$$
$$\left. -(m_1 - (\overline{x}_m^{(n)})) \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} F^{m-1}(\overline{t}_m^{(n)}) \left[1 - F^m(\overline{t}_m^{(n)})\right] \right. \quad (15)$$

Полученные зависимости позволяют в дальнейшем построить итерационную процедуру вычисления условного математического ожидания $E\left[\overline{t}_m^{(n)} / t_m^{(n)}\right]$если принять в качестве первого приближения значения $\lambda_1 = \frac{m_1}{\sigma^2}, \lambda_2 = -\frac{1}{(2\sigma^2)}$,и перейти к стандартным параметрам распределения $(m_1 = 0, \sigma^2 = 1)$.

Подстановка множителей λ_1и λ_2в уравнение Эйлера-Лагранжа позволяет найти распределение генеральной совокупности *F(t),* характеризуемой математическим ожиданием m, дисперсией σ^2 и цензурируемым элементом $t_m^{(n)}$. Заметим, что в частных, но типовых, в практике наблюдений, случаях, полученное экстремальное распределение упрощается. Рассмотрим некоторые из них.

Если имеет место цензурирование справа $\overline{t}_m^{(n)}$, то дифференциальному уравнению соответствует гипернормальное распределение.

Применение аналитических и статистических моделей связано с априорным поиском структуры этих моделей, чаще всего, при ограниченной информации о характере развития процесса.

Определение параметров статистической модели и оценка точности прогноза требуют к тому же наличия необходимых статистических данных, характеризующих поведение объекта прогнозирования в период ретроспекции.

Указанные обстоятельства в первую очередь снижают достоверность выводов в задачах прогнозирования развития технического уровня.

В связи с этим, для выполнения прогноза представляется целесообразным рассмотреть подход, не связанный с использованием жесткой структуры модели и ограниченными требованиями к объему априорной информации. Сущность такого метода заключается в представлении используемого для прогнозирования динамического ряда в качестве определенным образом ориентированного процесса случайного блуждания и статистического моделирования.

Значение изменяющегося параметра объекта прогнозирования для каждого момента в период ретроспекции можно представить в виде:

$$y_i = y_{i-1} + e_{i-1}, i-1,., N, \tag{16}$$

где y_i – значение динамического ряда в i -й момент времени периода ретроспекции;

y_{i-1} – значение динамического ряда в предыдущий момент времени;

e_{i-1} – приращение переменной объекта прогнозирования в i -й момент времени по сравнению с предыдущими;

N – число значений динамического ряда.

Поскольку приращения носят случайный характер, для них можно определить вид закона распределения и его параметры. При том нужно учесть характер зависимости последующих приращений от предыдущих.

Предполагается, что на периоде упреждения характер изменений динамического ряда сохраняется. Тогда, используя характеристики приращений, метод статистических испытаний можно применить для моделирования приращений на периоде упреждения прогноза.

Значение единичной реализации прогноза на каждом последующем шаге прогнозирования будет равно

$$X_j = X_{j-1} + e_j;\ j = 1,\dots,M, \tag{17}$$

где *j* – номер шага на периоде упреждения;

M – число шагов на периоде упреждения;

X_{j-1} – значение переменной объекта прогнозирования на предыдущем шаге;

e_j – моделируемое значение приращения на *j* - м шаге.

Производя данную процедуру до момента прогнозирования, получим значение точечного прогноза

$$X_{\text{пр}} = y_N + \sum_{j=1}^{M} e_j, \tag{18}$$

где $X_{\text{пр}}$ – точечный прогноз на M-ный период упреждения;

y_N – конечное значение динамического ряда.

При разыгрывании данной процедуры многократно образуется совокупность случайных значений точечного прогноза. По полученной выборке значений $X_{\text{пр}}$ определяется среднее значение прогноза и его дисперсия

$$X_{\text{пр}} = y_N + \frac{1}{k}\sum_{k=1}^{k}\sum_{j=1}^{M} e_{jk}, \tag{19}$$

$$\sigma_{пр}^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{k=1}^{k}\left(X_{пр,k} = X_{пр}\right)^2, \tag{20}$$

где k – число реализаций точечного прогноза;

e_{Jk} – разыгрываемое значение приращения на j шаге периода упреждения в k-ой реализации точечного прогноза.

Процедура моделирования отличается простотой, но вместе с тем характеризуется некоторой громоздкостью, обусловленной применением метода статистических испытаний. Поэтому коренным вопросом является рациональное проведение моделирования приращений.

При наличии динамических рядов, имеющих продолжительную ретроспекцию, позволяющую получить репрезентативную выборку приращений, моделирование можно осуществлять в соответствии с определенным по этой выборке эмпирическим законом распределения приращений.

Для коротких динамических рядов можно применить допущение о нормальности отклонений значений динамического ряда от тренда. При этом допущении плотность распределения приращений также является нормальной.

При наличии ретроспективной информации малого объема (короткие динамические ряды) для моделирования приращений целесообразно использовать двумерное нормальное распределение.

Двумерная плотность вероятности зависит в этом случае от пяти параметров

$$f\left(e^{-},e^{+}\right)\frac{1}{2\pi\sigma_{-}\sigma_{+}\sqrt{1-r^{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r^{2}\right)}\left[\frac{\left(e^{-}-\overline{e}^{-}\right)^{2}}{\sigma_{-}^{2}}-2r\frac{\left(e^{-}-\overline{e}^{-}\right)\left(e^{+}-\overline{e}^{+}\right)^{2}}{\sigma_{-}\sigma_{+}^{2}}+\frac{\left(e^{+}-\overline{e}^{+}\right)^{2}}{\sigma_{+}^{2}}\right]\right\},(21)$$

где $e^{-},e^{+},\overline{e}^{-},\overline{e}^{+},\sigma_{-},e_{+}$ – случайные значения, математического ожидания и среднеквадратические отклонения предыдущих и последующих приращений переменной объекта прогнозирования соответственно;

r – коэффициент корреляции последующих приращений с предыдущими.

Очевидно, что одно и то же приращение в зависимости от того относительно какой точки оно рассматривается, может быть как предыдущим, так и последующим. Однако первое приращение является только предыдущим.

При обработке исходного динамического ряда определяются оценки математических ожиданий и дисперсий предыдущих и последующих приращений. Множество предыдущих приращений $E^{-}=\left\{e_{1}^{-}\right\}$ определяется по зависимости

$$e_{1}^{+}=y_{i+1}-y_{i};i=\overline{1,N-2}.$$

или $e_{i}^{+}=e_{i+1}^{-}$.

По множеству E^{-} определяются среднее значение $\overline{e}^{-}$ и оценка дисперсии σ_{-}^{2} предыдущих приращений

$$\overline{e}^{-}=\frac{1}{N-1}\sum_{i-1}^{N-1}e_{i}^{-};\quad \sigma_{-}^{2}=\frac{1}{N-2}\sum\left(e_{i}^{-}-\overline{e}^{-}\right)^{2}. \qquad (22)$$

Соответственно, по множеству E^{+} определяются среднее значение $\overline{e}^{+}$ и оценки дисперсии σ_{+}^{2} последующих приращений

$$\overline{e}^{\,+} = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N-2} e_i^+; \tag{23}$$

$$\sigma_+^2 = \frac{1}{N-3}\sum_{i=1}^{N-2} (e_i^+ - \overline{e}^{\,+})^2.$$

Оценка значения коэффициента корреляции r определится по зависимости

$$r = \frac{1}{N-4}\sum_{i=1}^{N-2} \frac{(e^- - \overline{e}^{\,-})(e^+ - \overline{e}^{\,+})}{\sigma_-\sigma_+}. \tag{24}$$

Для моделирования случайных приращений на периоде упреждения используется алгоритм моделирования двумерного нормального распределения [2]. Для рассматриваемого случая моделирующая зависимость последующих приращений e_{jk}^+

$$\begin{aligned} e_{jk}^+ &= \overline{e}^{\,+} + (a_{jk} - \frac{1}{2})\sigma + \sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\exp\left[\frac{r^2(e_{jk}^- - \overline{e}^{\,-})}{2(1-r^2)\sigma^2}\right] - \frac{\left(a_{jk} - \frac{1}{2}\right)}{2!}\frac{\sigma_+}{\sigma_-}(e_{jk}^- - \overline{e}^{\,-})r\left(\sqrt{2\pi}\right)^2 \times \\ &\times \exp\left[\frac{r^2(e_{jk} - \overline{e}^{\,-})}{(1-r^2)\sigma_-^{\,2}}\right] + \frac{\left(a_{jk} - \frac{1}{2}\right)^3}{2!}\sigma_+\left(\sqrt{2\pi}\right)^3\sqrt{1-r^2}\left[1 - \frac{r^2}{1-r^2}\frac{(e_{jk}^- - \overline{e}^{\,-})}{\sigma_-^2}\right]\exp\left[\frac{3}{2}\frac{r^2(e_{jk}^- - \overline{e}^{\,-})}{(l-r^2)\sigma_-^2}\right] + \ldots \end{aligned} \tag{25}$$

При моделировании случайного e_{jk}^+ значения на первом шаге в каждой k -й реализации e_{jk}^+ предыдущее значение e_{jk}^- равно значению последнего приращения на периоде ретроспекции e_{N-1}^-, т.е.

$$e_{jk}^- = e_{N-1}^-.$$

При моделировании приращений на следующих шагах периода упреждения

$$e_{jk}^- = e_{j-1,k}^+.$$

Оценка коэффициента корреляции, определяемая по выборкам малых объемов, является случайной. Плотность вероятности выборочного коэффициента корреляции имеет сложный вид [3] при принятом допущении о нормальности распределения приращений можно использовать нормализующее преобразование Фишера

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Случайная величина *Z* распределена нормально с параметрами

$$\left.\begin{aligned} Z &\cong \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} \\ \sigma_z^2 &= \frac{1}{N-S} \end{aligned}\right\}, \qquad (26)$$

где r – значение выборочного коэффициента корреляции, определяемое по зависимости (24).

Моделируя значения Z как нормально распределенную случайную величину по зависимости

$$Z_{jk} = \bar{Z} + v_{jk}\sigma_z \quad , \qquad (27)$$

где v_{jk} – нормированная нормально распределенная случайная величина, и осуществляя обратный по отношению к преобразованию Фишера переход, получим случайное значение коэффициента корреляции

$$r_{jk} = \frac{e^{2z_{jk}} - 1}{e^{2z_{jk}} + 1} \qquad (28)$$

С учетом изложенного, моделирование приращений на периоде упреждения включает выполнение следующих действий.

1. Обращение к датчику нормированных нормально распределенных случайных чисел и получение v_{Jk}.
2. Вычисление случайного значения r по зависимостям (27) и (28).
3. Обращение к датчику равномерно распределенных случайных чисел и получение числа a_{jk} .
4. Вычисление приращения e_{jk}^{+} по зависимости (25) при полученном в п. 2 значении коэффициента корреляции r_{jk} и полученном в п. 3 значении a_{Jk}.

Многократно имитируя приращения и используя зависимости (19) и (20), вычисляются характеристики прогноза.

Таким образом, к достоинствам рассмотренного метода прогнозирования очевидно можно отнести:

- простоту вычислительного алгоритма;
- возможность использования при ограниченной ретроспективной информации (начиная с 7-9 значений динамического ряда);
- получение оценки точности прогноза (определения дисперсии);
- отсутствие эффекта дисконтирования, присущего другим статистическим методам прогнозирования.

ВЫВОДЫ

Задача оценки качества технологических систем и последующего планирования их замены или модернизации тесно связана с задачей учета их срока морального старения. В работе рассмотрено несколько моделей динамики технического уровня, параметры которых определяются по ретроспективной информации. По результатам проведенного анализа сделан вывод, что наиболее адекватно отражает динамику технического уровня теоретико-вероятностная схема формирования модели, описывающая суммирование небольшого случайного числа скачков случайных приращений технического уровня. Прогнозирование величины технического уровня представляется целесообразным в этом случае осуществлять методом случайного блуждания с помощью статистического моделирования (методом Монте-Карло).

Полученные решения позволяют получить прогноз периода морального старения технологической системы и определить целесообразные сроки ее замены или модернизации.

Список использованных источников

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: «Академия», 2005. 576 с.
2. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Издат. дом «Вильямс», 2002. 512 с.
3. Мартыщенко Л.А., Ташевский А.Г. Военно-научные исследования и разработка вооружения и военной техники. Ч. II. Л.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1993. 253 с.
4. Крянев А.В., Семенов С.С. Особенности развития современной техники и метод оценки технического уровня сложных технических систем, основанных на использовании зарождающихся технологий // Управление большими системами. Вып. 39. М., 2012.
5. Шестопалова О.Л. Прогнозирование моральной долговечности распределенных информационных систем с учетом прогрессирующих ограничений на возможности восстановления ресурса элементной базы // Современные проблемы науки и образования. № 6. М., 2013.
6. Ташевский А.Г. Верификация результатов испытаний сложных технических систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Моделирование. 2013. № 2 (171). С. 203-210.
7. Ташевский А.Г. Интерпретация результатов испытаний после модернизации систем энергомашиностроения // Инструмент и технологии. 2012. № 36. С. 34-39.
8. Ташевский А.Г., Петров В.М. Оценка продукции судостроения по результатам оперативного контроля технологического процесса // Труды пятого международного симпозиума по транспортной триботехнике «Транстрибо-2013». СПб.: Изд-во ФГБОУ ВПО «Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова», 2013. С. 53-58.

9. Ташевский А.Г. Модели аварийных ситуаций для обеспечения безопасности функционирования сложных технических систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Моделирование. Математические методы. 2013. № 1 (166). С. 256-263.
10. Ташевский А.Г., Наумова А.К. Математическое моделирование инновационных процессов в сложных технических системах применительно к задачам судостроения // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2014. № 1 (23). С. 59-63.
11. Ташевский А.Г. Математические модели продолжительности жизненного цикла технических систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Моделирование. Математические методы. 2014. № 1 (190). С. 169-178.
12. Ташевский А. Г. Модели расчёта долговечности деталей энергетического оборудования // Инструмент и технологии. СПб., 2012. № 37. С. 46-51.