УДК 539.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОСТИ В СРЕДНЕМ ИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ТЕЛ В СЛУЧАЕ ЗАПИСИ ЗАКОНА ГУКА ДЛЯ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ ПО КОШИ

Тарасюк Иван Александрович
магистрант
Кравчук Александр Степанович
д-р физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)
author@apriori-journal.ru

Аннотация. Целью исследования является подтверждение того факта, что ранее полученные теоретические результаты для композиционных тел в случае использования записи закона Гука для тензора деформаций по Ильюшину, можно применять и в случае записи закона Гука для тензора деформаций по Коши.

Ключевые слова: композиционный изотропный материал; тензор деформаций по Ильюшину; тензор деформаций по Коши; сужение «вилки» модулей упругости композиционного материала.

CALCULATION OF EFFECTIVE ELASTIC PARAMETERS FOR ISOTROPIC COMPOSITE BODY IN THE CASE OF APPLICATION OF HOOKE'S LAW FOR THE CAUCHY STRAIN TENSOR

Tarasyuk Ivan Alexandrovich
undergraduate
Kravchuk Alexander Stepanovich
doctor of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. The purpose of the paper is to confirm the fact that the theoretical results previously obtained for the composite bodies in the case of the Hooke's law for Ilyushin strain tensor can be applied in the case of Hooke's law for the Cauchy strain tensor.

Key words: composite isotropic material; Ilyushin strain tensor; Cauchy strain tensor; narrowing «range» of the elastic moduli of the composite material.

Введение. В большинстве случаев при получении эффективных свойств композиционных тел, кроме уравнений состояния твердого тела, не используются никакие дифференциальные соотношения. Поэтому от формальной записи уравнений состояния может зависеть и результат проведенных усреднений [1].

Совершенно неожиданным был результат сравнения [2] тензорной записи обобщенного закона Гука в технической [3] и теоретической литературе [4].

Оказалось, что обобщенный закон Гука в современной тензорной записи [4] не соответствует ранее принятому варианту [2; 3]. При более детальном рассмотрении выяснилось [2], что с точностью до принятых переобозначений закон Гука записан нормально, однако, негласно, без изменения названия, был заменен тензор деформаций по Коши [2; 3]:

$$\varepsilon_{ii} = u_{i,i} \ \left(i = \overline{1,3}\right),\ \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \ \left(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3},\ i \neq j\right), \tag{1}$$

на тензор деформации Ильюшина [2; 4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \left(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3}\right). \tag{2}$$

Таким образом, для тензора деформаций по Ильюшину (2) используется тензорная запись закона Гука в виде [2]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\Theta\delta_{ij}, \left(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3}\right), \tag{3}$$

где $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, δ_{ij} – символ Кронекера [4].

В работе [1] были получены эффективные коэффициенты в среднем изотропного композиционного тела для распространенной на постсоветском научном пространстве записи обобщенного закона Гука (3) для тензора деформаций по Ильюшину (2).

Однако для тензора деформаций по Коши (1), используемого для решения технических задач, обобщенный закон Гука имеет несколько другое начертание [2]:

$$\sigma_{ii} = 2G\varepsilon_{ii} + \lambda\Theta \ (i = \overline{1,3}), \tag{4}$$
$$\sigma_{ij} = G\varepsilon_{ij} \ (i = \overline{1,3},\, j = \overline{1,3},\, i \neq j).$$

Целью данного исследования является подтверждение того, что теоретические результаты, полученные для (2), (3) [1], можно применять и для (1), (4).

Постановка задачи. Как и в работе [1], для решения задачи определения эффективных модулей рассматривается элемент $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ композиционного материала. Размеры параллелепипеда значительно превосходят характерные размеры неоднородностей, но пренебрежимо малы в сравнении с характерными размерами твердого тела [1].

Будем считать, что параллелепипед состоит из n изотропных компонент, и предполагается, что значения концентраций γ_k компонент композиционного материала известны для всего материала, и они же являются объемными долями компонент для каждого из параллелепипедов. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние отдельно взятого элементарного параллелепипеда с координатами (x, y, z), имитирующего напряженно-деформированное состояние композиционного материала в данной точке [1].

Определение эффективных модулей сдвига по Фойгту и по Рейссу [1]. Используем гипотезу Фойгта о том, что при простейшем нагружении в макроточке тела из композиционного материала имеет место однородная деформация, т.е. для любой компоненты параллелепипеда верны соотношения: $\varepsilon_{x,i} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{y,i} = \varepsilon_y$, $\varepsilon_{z,i} = \varepsilon_z$, $\varepsilon_{xy,i} = \varepsilon_{xy}$, $\varepsilon_{yz,i} = \varepsilon_{yz}$, $\varepsilon_{zx,i} = \varepsilon_{zx}$. Запишем закон Гука в форме (4) для *i*-ой компоненты элементарного параллелепипеда:

$$\sigma_{xy,i} = G_i\, \varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz,i} = G_i\, \varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{zx,i} = G_i\, \varepsilon_{zx}.$$

где $G_i = \dfrac{E_i}{2(1+\nu_i)}$.

Для нахождения эффективного модуля сдвига по Фойгту определим средние значения касательных напряжений $\langle\sigma_{xy}\rangle_F$, $\langle\sigma_{yz}\rangle_F$, $\langle\sigma_{zx}\rangle_F$, действующих на все компоненты композиционного материала, с помощью статистического усреднения дискретных случайных величин $\sigma_{xy,i}$, $\sigma_{yz,i}$, $\sigma_{zx,i}$:

$$\langle\sigma_{xy}\rangle_F = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \varepsilon_{xy} = \langle G\rangle_F \cdot \varepsilon_{xy},$$

$$\langle\sigma_{yz}\rangle_F = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \varepsilon_{yz} = \langle G\rangle_F \cdot \varepsilon_{yz},$$

$$\langle\sigma_{zx}\rangle_F = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \varepsilon_{zx} = \langle G\rangle_F \cdot \varepsilon_{zx},$$

где усредненное значение $\langle G\rangle_F$ определяется выражениями:

$$\langle G\rangle_F = \frac{\langle E\rangle_F}{2\left(1+\langle\nu\rangle_F\right)},$$

$$\langle E\rangle_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i\cdot E_i}{1+\nu_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i\cdot E_i}{1-2\nu_i}\right)\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i\cdot E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}\right),$$

$$\langle\nu\rangle_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i\cdot E_i\cdot\nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}\right)\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i\cdot E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}\right).$$

Используем гипотезу Рейсса о том, что при простейшем нагружении в композите имеет место однородное напряженное состояние, т.е. для любой компоненты параллелепипеда верны соотношения: $\sigma_{x,i}=\sigma_x$, $\sigma_{y,i}=\sigma_y$, $\sigma_{z,i}=\sigma_z$, $\sigma_{xy,i}=\sigma_{xy}$, $\sigma_{yz,i}=\sigma_{yz}$, $\sigma_{zx,i}=\sigma_{zx}$. Запишем закон Гука в форме (4) для *i*-ой компоненты элементарного параллелепипеда:

$$\varepsilon_{xy,i}=\frac{\sigma_{xy}}{G_i},\quad \varepsilon_{yz,i}=\frac{\sigma_{yz}}{G_i},\quad \varepsilon_{zx,i}=\frac{\sigma_{zx}}{G_i},$$

где $G_i=\dfrac{E_i}{2(1+\nu_i)}$.

Для нахождения эффективного модуля сдвига по Рейссу определим средние значения касательных деформаций $\langle\varepsilon_{xy}\rangle_R$, $\langle\varepsilon_{yz}\rangle_R$, $\langle\varepsilon_{zx}\rangle_R$ по всем компонентам композиционного материала в элементарном параллелепипеде с помощью статистического усреднения дискретных случайных величин $\varepsilon_{xy,i}$, $\varepsilon_{yz,i}$, $\varepsilon_{zx,i}$:

$$\langle\varepsilon_{xy}\rangle_R=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\frac{2(1+\nu_i)}{E_i}\sigma_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\langle G\rangle_R},$$

$$\langle\varepsilon_{yz}\rangle_R=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\frac{2(1+\nu_i)}{E_i}\sigma_{yz}=\frac{\sigma_{yz}}{\langle G\rangle_R},$$

$$\langle\varepsilon_{zx}\rangle_R=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\frac{2(1+\nu_i)}{E_i}\sigma_{zx}=\frac{\sigma_{zx}}{\langle G\rangle_R},$$

где усредненное значение $\langle G\rangle_R$ определяется выражениями:

$$\langle G\rangle_R=\frac{\langle E\rangle_R}{2\left(1+\langle\nu\rangle_R\right)},$$

$$\langle E\rangle_R=1\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{E_i}\right),\ \langle\nu\rangle_R=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i\nu_i}{E_i}\right)\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{E_i}\right).$$

Покажем, что справедливо неравенство, связывающее модули сдвига:

$$\langle G\rangle_F\geq\langle G\rangle_R. \tag{5}$$

Для этого рассмотрим отношение $\langle G\rangle_F\big/\langle G\rangle_R$:

$$\frac{\langle G\rangle_F}{\langle G\rangle_R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i E_i}{2(1+\nu_i)}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\frac{2(1+\nu_i)}{E_i}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\gamma_i\gamma_j\left(\frac{E_i}{E_j}\frac{1+\nu_j}{1+\nu_i}+\frac{E_j}{E_i}\frac{1+\nu_i}{1+\nu_j}\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}2\gamma_i\gamma_j=1.$$

Отсюда следует справедливость (5).

Вычисление «вилки» эффективных модулей сдвига. Перейдем к определению «вилки» эффективных модулей сдвига. Для этого запишем недиагональные элементы матрицы жесткости $J(\alpha)$, используя усреднение с неопределенным коэффициентом $0<\alpha<1$:

$$\left\langle \varepsilon_{xy} \right\rangle_{\alpha} = \alpha \left\langle \varepsilon_{xy} \right\rangle_F + (1-\alpha)\left\langle \varepsilon_{xy} \right\rangle_R = \left(\frac{\alpha}{\langle G \rangle_F} + \frac{(1-\alpha)}{\langle G \rangle_R} \right) \sigma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\langle G(\alpha) \rangle^{\sigma}},$$

$$\left\langle \varepsilon_{yz} \right\rangle_{\alpha} = \alpha \left\langle \varepsilon_{yz} \right\rangle_F + (1-\alpha)\left\langle \varepsilon_{yz} \right\rangle_R = \left(\frac{\alpha}{\langle G \rangle_F} + \frac{(1-\alpha)}{\langle G \rangle_R} \right) \sigma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{\langle G(\alpha) \rangle^{\sigma}},$$

$$\left\langle \varepsilon_{zx} \right\rangle_{\alpha} = \alpha \left\langle \varepsilon_{zx} \right\rangle_F + (1-\alpha)\left\langle \varepsilon_{zx} \right\rangle_R = \left(\frac{\alpha}{\langle G \rangle_F} + \frac{(1-\alpha)}{\langle G \rangle_R} \right) \sigma_{yz} = \frac{\sigma_{zx}}{\langle G(\alpha) \rangle^{\sigma}},$$

где усредненное значение $\langle G(\alpha) \rangle^{\sigma}$ определяется выражениями:

$$\langle G(\alpha) \rangle^{\sigma} = \frac{\langle E(\alpha) \rangle^{\sigma}}{2\left(1 + \langle \nu(\alpha) \rangle^{\sigma}\right)} = \frac{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R}{2\left(\alpha \langle E \rangle_R \left(1 + \langle \nu \rangle_F\right) + (1-\alpha)\langle E \rangle_F \left(1 + \langle \nu \rangle_R\right)\right)}, \quad (6)$$

$$\langle E(\alpha) \rangle^{\sigma} = \frac{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R}{(1-\alpha)\langle E \rangle_F + \alpha \langle E \rangle_R}, \quad (7)$$

$$\langle \nu(\alpha) \rangle^{\sigma} = \frac{(1-\alpha)\langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_R + \alpha \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_F}{(1-\alpha)\langle E \rangle_F + \alpha \langle E \rangle_R}. \quad (8)$$

Запишем недиагональные элементы матрицы податливости $E(\alpha)$, используя усреднение с неопределенным коэффициентом $0 < \alpha < 1$:

$$\left\langle \sigma_{xy} \right\rangle_{\alpha} = \alpha \left\langle \sigma_{xy} \right\rangle_F + (1-\alpha)\left\langle \sigma_{xy} \right\rangle_R = \left(\alpha \langle G \rangle_F + (1-\alpha)\langle G \rangle_R\right) \varepsilon_{xy} = \langle G(\alpha) \rangle^{\varepsilon} \varepsilon_{xy},$$

$$\left\langle \sigma_{yz} \right\rangle_{\alpha} = \alpha \left\langle \sigma_{yz} \right\rangle_F + (1-\alpha)\left\langle \sigma_{yz} \right\rangle_R = \left(\alpha \langle G \rangle_F + (1-\alpha)\langle G \rangle_R\right) \varepsilon_{yz} = \langle G(\alpha) \rangle^{\varepsilon} \varepsilon_{yz},$$

$$\left\langle \sigma_{zx} \right\rangle_{\alpha} = \alpha \left\langle \sigma_{zx} \right\rangle_F + (1-\alpha)\left\langle \sigma_{zx} \right\rangle_R = \left(\alpha \langle G \rangle_F + (1-\alpha)\langle G \rangle_R\right) \varepsilon_{zx} = \langle G(\alpha) \rangle^{\varepsilon} \varepsilon_{zx},$$

где усредненное значение $\langle G(\alpha)\rangle^{\varepsilon}$ определяется выражениями:

$$\langle G(\alpha)\rangle^{\varepsilon}=\frac{\langle E(\alpha)\rangle^{\varepsilon}}{2\left(1+\langle\nu(\alpha)\rangle^{\varepsilon}\right)}=\frac{\alpha\langle E\rangle_F\left(1+\langle\nu\rangle_R\right)+(1-\alpha)\langle E\rangle_R\left(1+\langle\nu\rangle_F\right)}{2\left(1+\langle\nu\rangle_R\right)\left(1+\langle\nu\rangle_R\right)},\qquad(9)$$

$$\begin{gathered}\langle E(\alpha)\rangle^{\varepsilon}=\left(\alpha\langle E\rangle_F\left(1-2\langle\nu\rangle_R\right)+(1-\alpha)\langle E\rangle_R\left(1-2\langle\nu\rangle_F\right)\right)\times\\ \times\frac{\left(\alpha\langle E\rangle_F\left(1+\langle\nu\rangle_R\right)+(1-\alpha)\langle E\rangle_R\left(1+\langle\nu\rangle_F\right)\right)}{\alpha\langle E\rangle_F\left(1+\langle\nu\rangle_R\right)\left(1-2\langle\nu\rangle_R\right)+(1-\alpha)\langle E\rangle_R\left(1+\langle\nu\rangle_F\right)\left(1-2\langle\nu\rangle_F\right)},\end{gathered}\qquad(10)$$

$$\begin{gathered}\langle\nu(\alpha)\rangle^{\varepsilon}=\frac{\alpha\langle E\rangle_F\langle\nu\rangle_F\left(1+\langle\nu\rangle_R\right)\left(1-2\langle\nu\rangle_R\right)}{\alpha\langle E\rangle_F\left(1+\langle\nu\rangle_R\right)\left(1-2\langle\nu\rangle_R\right)+(1-\alpha)\langle E\rangle_R\left(1+\langle\nu\rangle_F\right)\left(1-2\langle\nu\rangle_F\right)}+\\ +\frac{(1-\alpha)\langle E\rangle_R\langle\nu\rangle_R\left(1+\langle\nu\rangle_F\right)\left(1-2\langle\nu\rangle_F\right)}{\alpha\langle E\rangle_F\left(1+\langle\nu\rangle_R\right)\left(1-2\langle\nu\rangle_R\right)+(1-\alpha)\langle E\rangle_R\left(1+\langle\nu\rangle_F\right)\left(1-2\langle\nu\rangle_F\right)}.\end{gathered}\qquad(11)$$

Покажем, что справедливо неравенство, связывающее модули сдвига:

$$\langle G(\alpha)\rangle^{\varepsilon}\geq\langle G(\alpha)\rangle^{\sigma}.\qquad(12)$$

Для этого рассмотрим отношение $\langle G(\alpha)\rangle^{\varepsilon}\Big/\langle G(\alpha)\rangle^{\sigma}$:

$$\begin{gathered}\frac{\langle G(\alpha)\rangle^{\varepsilon}}{\langle G(\alpha)\rangle^{\sigma}}=\left(\alpha\langle G\rangle_F+(1-\alpha)\langle G\rangle_R\right)\left(\frac{\alpha}{\langle G\rangle_F}+\frac{1-\alpha}{\langle G\rangle_R}\right)=\\ =\alpha^2+\alpha(1-\alpha)\left(\frac{\langle G\rangle_F}{\langle G\rangle_R}+\frac{\langle G\rangle_R}{\langle G\rangle_F}\right)+(1-\alpha)^2\geq\alpha^2+2\alpha(1-\alpha)+(1-\alpha)^2=1.\end{gathered}\qquad(13)$$

Из (13) следует справедливость неравенства (12).

Определим уменьшенную по сравнению с «вилкой» Фойгта-Рейсса «вилку» модулей сдвига $\left[\langle G\rangle^{\sigma};\langle G\rangle^{\varepsilon}\right]$ в среднем изотропного композиционного материала как среднее значение выражений (6) и (9) [1]:

$$\langle G\rangle^{\sigma}=\int_{0}^{1}\langle G(\alpha)\rangle^{\sigma}d\alpha,\quad \langle G\rangle^{\varepsilon}=\int_{0}^{1}\langle G(\alpha)\rangle^{\varepsilon}d\alpha\,. \tag{14}$$

После интегрирования (14) будем иметь:

$$\langle G\rangle^{\sigma}=\frac{\langle G\rangle_F\langle G\rangle_R\ln\left(\langle G\rangle_F/\langle G\rangle_R\right)}{\langle G\rangle_F-\langle G\rangle_R}, \tag{15}$$

$$\langle G\rangle^{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(\langle G\rangle_F+\langle G\rangle_R\right). \tag{16}$$

Нетрудно заметить, что символическая запись (7), (8) и (10), (11), а также эффективных модулей сдвига (15) и (16) полностью совпадает с соответствующими модулями в работе [1].

Выводы. В данной работе продемонстрировано, что эффективные соотношения, полученные в работе [1] для обобщенного закона Гука (3), записанного для тензора деформаций по Ильюшину (2), остаются верными для обобщенного закона Гука (4), записанного для тензора деформаций по Коши (1).

Список использованных источников

1. Тарасюк И.А., Кравчук А.С. Сужение «вилки» Фойгта-Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2014. № 3. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf
2. Кравчук А.С., Кравчук А.И. К вопросам о несоосности девиаторов напряжений и деформаций в «неисправленных» уравнениях обобщенного закона Гука и о правомерности применения тензора деформаций по Ильюшину в современной механике твердого тела // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2015. № 3. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2015/Kravchuk-Kravchuk3.pdf
3. Расчеты на прочность в машиностроении в 3 томах. Т. 1: Теоретические основы и экспериментальные методы. Расчеты стержневых элементов конструкций при статической нагрузке / под ред. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
4. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. Минск: БГУ, 2011. 543 с.