УДК 539.3

К ВОПРОСАМ О НЕСООСНОСТИ ДЕВИАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В «НЕИСПРАВЛЕННЫХ» УРАВНЕНИЯХ ОБОЩЕННОГО ЗАКОНА ГУКА И О ПРАВОМЕРНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ ПО ИЛЬЮШИНУ В СОВРЕМЕННОЙ МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кравчук Александр Степанович
д-р физ.-мат. наук

Кравчук Анжелика Ивановна
канд. физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. Настало время существенного пересмотра и унификации уравнений механики твердого тела для физиков и инженеров. Необходимо либо экспериментально обосновать применение тензора деформаций Ильюшина, либо подтвердить исходную запись тензора деформаций по Коши и внести изменения в тензорные уравнения нелинейного деформирования твердого тела, а так же прекратить ложное тиражирование в учебной литературе тензора деформаций Ильюшина под названием тензора деформаций Коши. Очевидно, что использование тензоров по Коши и по Ильюшину в упругом случае будут давать разные распределения деформаций при одинаковых напряжениях и перемещениях.

Ключевые слова: Тензор деформаций по Коши; тензор деформаций по Ильюшину; тензорные записи уравнений состояния; соосность девиаторов напряжений и деформаций.

TO THE QUESTIONS OF MISSING OF COAXIALITY OF DEVIATORS OF STRESSES AND STRAINS IN «UNCORRECTED» EQUATIONS OF GENERALIZED HOOKE'S LAW AND LEGALITY OF THE APPLICATION THE ILYUSHIN STRAIN TENSOR IN MODERN SOLID MECHANICS

Kravchuk Alexander Stepanovich
doctor of physical and mathematical sciences

Kravchuk Anzhelica Ivanovna
candidate of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. It is time for a major revision and harmonization of the equations of solid mechanics for physicists and engineers. Scientific community must either experimentally justify the application of the Ilyushin strain tensor, either confirm the original record of the Cauchy strain tensor, and make changes in tensor equations of nonlinear deformation of solids, as well as to stop the false replication in the academic literature of the Ilyushin strain tensor under name of Cauchy strain tensor. Obviously, the application of the Cauchy and Ilyushin tensors in elastic case will give different strain distribution under the same stresses and displacements.

Key words: Cauchy strain tensor; Ilyushin strain tensor; tensor records of equations of state; alignment stress and strain deviators.

Введение. В настоящее время в литературе по механике твердого тела накопилось много противоречий, связанных с базовыми понятиями, например, такими как тензор деформаций по Коши, а также записью, казалось бы таких простых уравнений состояния как обобщённый закон Гука.

Отметим, прежде всего, что в механике твердого тела произошло негласное разделение между уравнениями механики твердого тела, используемыми для инженерных расчетов и уравнениями, применяемыми при решении теоретических задач.

В первом случае обычно используется развернутая запись основных уравнений, устоявшаяся в 40-60-ые годы прошлого столетия. Во втором случае (теоретического раздела механики твердого тела) используется тензорная запись основных уравнений, принявшая свой окончательный вид в конце 70-ых годов прошлого столетия.

В связи с очень сильным сокращением и очевидным упрощением записи основных уравнений механики твердого тела в последнее время необходимо знать, каким образом пользоваться тензорными уравнениями. Однако, их простое заучивание очень опасно, т.к. при ближайшем сравнении тензорных и исходных развернутых уравнений технической механики твердого тела выяснилось, что не все так прозрачно и очевидно.

Первое, что бросается в глаза, это то, что закон Гука в современной тензорной записи не соответствует ранее принятой записи [1; 2]. При более детальном рассмотрении выясняется, что с точностью до принятых переобозначений закон Гука записан нормально, однако, негласно, без изменения названия, был заменен тензор деформаций по Коши [1; 2]:

$$\varepsilon_{ii} = u_{i,i} \ \ (i = 1,..,3), \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}\, ,\ (i \neq j\,),$$

на тензор деформации Ильюшина [3-6]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ (i, j = 1,..,3). \tag{2}$$

Детальное изложение проблемы. Для изотропных тел соотношения обобщенного закона Гука известны из курса сопротивления материалов. Так, в принятых обозначениях, компоненты тензоров напряжений и деформаций имеют вид ([1, с. 105], [2, с. 111]):

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\cdot\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right), \qquad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\cdot\left(\sigma_{33} + \sigma_{11}\right)\right),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{33} - \nu\cdot\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right), \tag{3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{G}\sigma_{12}, \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1}{G}\sigma_{23}, \qquad \varepsilon_{31} = \frac{1}{G}\sigma_{31},$$

где E – модуль упругости, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, связаные зависимостью $G = E/(2(1+\nu))$.

В ходе решения задач теории упругости возникает необходимость в обратных соотношениях, когда напряжения выражены через деформации. Воспользовавшись (3), получаем ([1, с. 105], [2, с. 111])

$$\sigma_{ii} = 2\mu\cdot\varepsilon_{ii} + \lambda\cdot\Theta \ (i = 1,..,3), \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} = \mu\cdot\varepsilon_{ij}, \ (i \neq j, i, j = 1,..,3),$$

где

$$\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1 - 2\cdot\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) = \frac{1}{K}\cdot\sigma, \tag{5}$$

$\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ – среднее нормальное напряжение, Θ – введенная ранее объемная деформация, $K = \dfrac{E}{3\cdot(1 - 2\cdot\nu)}$ – модуль объемной деформации, λ и μ – параметры Ляме, связанные с E, G и ν зависимостями:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\cdot\nu)}, \ \mu = G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)}. \qquad (6)$$

Из (4)-(6) очевидно, что тензорная запись обобщенного закона Гука $\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \Theta \cdot \delta_{ij}$ (где δ_{ij} – символ Кронекера), цитируемая во многих учебниках, не верна для тензора деформаций по Коши (1), т.к. коэффициенты при $i = j$ и $i \neq j$ отличаются в два раза (4). Однако упомянутая однострочная тензорная запись верна для тензора деформаций по Ильюшину (2).

Если необходимо записать уравнения (4) относительно ε_{ij}, то приходим к обратной форме закона Гука:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ii} - \frac{3\cdot\nu}{(1+\nu)}\cdot\sigma\right) \ (i = 1,..,3), \qquad (7)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{G}\sigma_{ij}, \ (i \neq j, i, j = 1,..,3).$$

Отметим, что тензорная однострочная форма записи, приводимая во многих учебниках:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{3\cdot\nu}{(1+\nu)}\cdot\sigma\cdot\delta_{ij}\right) \qquad (8)$$

также верна только для тензора деформаций по Ильюшину (2), но не по Коши (1), т.к. и в этом случае коэффициенты при $i = j$ и $i \neq j$ отличаются в два раза. В разных литературных источниках ошибки в записи обобщенного закона Гука различаются. Например, Н.Н. Малинин [7, с. 37] использовал правильную развернутую запись закона Гука (3) и, без вывода, неправильную тензорную (8).

Запись обощенного закона Гука через девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций. В случае несжимаемости материала ($\Theta = 0$, $\nu = 0.5$) использование соотношений (4) затруднительно, т.к. $\lambda \to \infty$. Поэтому целесообразно записать два соотношения, в которых объемная деформация была бы выделена в явном виде. Это достигается, например, использованием выражением закона Гука через девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций. Для получения этих уравнений используем обобщенный закон Гука в виде (4). Используя (6), получаем:

$$\sigma_{ii} = 2G \cdot \varepsilon_{ii} + \frac{E\nu}{(1 - 2 \cdot \nu)(1 + \nu)} \cdot \Theta .$$

Далее вывод необходимого уравнения заключается в применении следующей цепочки преобразований:

1. Представление коэффициента Ляме λ в виде разности:

$$\sigma_{ii} = 2G \cdot \varepsilon_{ii} + \frac{E}{3}\left(\frac{1}{(1 - 2 \cdot \nu)} - \frac{1}{(1 + \nu)}\right) \cdot \Theta .$$

2. Перенос уменьшаемого в левую часть:

$$\sigma_{ii} - \frac{E}{3}\frac{1}{(1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \Theta = 2G \cdot \varepsilon_{ii} - \frac{E}{3}\frac{1}{(1 + \nu)} \cdot \Theta .$$

3. Замена в левой части уравнения вычитаемого с использованием равенства (5):

$$\sigma_{ii} - \sigma = 2G \cdot \varepsilon_{ii} - \frac{E}{(1 + \nu)} \cdot \frac{\Theta}{3} .$$

4. Переобозначение в правой части уравнения коэффициента с помощью (6):

$$\sigma_{ii} - \sigma = 2G \cdot \left(\varepsilon_{ii} - \frac{\Theta}{3}\right).$$

5. Замена в правой части уравнения обозначения $\Theta/3$ с помощью (5).

В результате проведения вышеизложенных преобразований получаем систему уравнений [1, с. 112] для тензора по Коши (1):

$$s_{ii} = 2 \cdot G \cdot e_{ii} \ \ (i = 1,..,3), \qquad \sigma = K \cdot \Theta, \qquad (9)$$
$$s_{ij} = G \cdot e_{ij} \ \ (i \neq j, i, j = 1,..,3).$$

Отметим, что (9) отличается от общепринятой записи $s_{ij} = 2 \cdot G \cdot e_{ij}$ [4-6] тем, что случай $i \neq j$ вынесен в отдельное уравнение из-за очевидного несовпадения с коэффициентами в (9) в случае когда $i = j$.

Самым «неприятным», что может быть в записи (9), так это то, что она указывает, что девиатор напряжений и деформаций в соответствии с (9) не соосны для тензора по Коши, хотя на этом факте держится вся современная механика твердого тела.

Необходимо отметить, что тензорная запись $s_{ij} = 2 \cdot G \cdot e_{ij}$, приводимая в книге А.А. Ильюшина сделана в предположении, что компоненты деформаций по Ильюшину e_{ij} связаны с деформациями по Коши ε_{ij} при $i \neq j$ уравнениями $e_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}$ [3, с. 51], т.е. сам Ильюшин признавал, что девиаторы напряжений и деформаций по Коши (1) не соосны. При использовании же гипотезы $e_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}$ $(i \neq j)$ А.А. Ильюшин показал, что кроме соосности девиаторов еще и интенсивности напряжений пропорциональны интенсивностям деформаций при упругих и малых упругопластических деформациях [3].

Подмена тензора деформаций по Коши. Таким образом, исходя из вышеизложенного, для того, чтобы построить единую теорию механики деформируемого твердого тела тензор деформаций по Коши (1) был заменен тензором деформаций по А.А. Ильюшину (2).

Когда произошла данная негласная подмена установить в литературных источниках уже невозможно. Однако, очевидно, что к концу 70-х годов прошлого столетия тензор деформаций по Ильюшину (2) полностью вытеснил тензор деформаций по Коши (1) из теоретической литературы [4-6]. Однако, последний остался неизменным в технической литературе, не склонной к использованию тензоров.

Подмена тензора деформаций (1) на (2) могла быть осуществлена только с заменой закона Гука (3) на новую запись:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\cdot\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right), \qquad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\cdot\left(\sigma_{33} + \sigma_{11}\right)\right),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{33} - \nu\cdot\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right), \tag{10}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12}, \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G}\sigma_{23}, \qquad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2G}\sigma_{31},$$

Сделав это «исправление» в уравнениях связи сдвигов и касательных напряжений в угоду создания общей теории деформирования твердого тела была допущена сознательная ошибка в (10), чтобы обосновать правомерность применения тензора (2). Так, во-первых, только совместное использование (2) и (10) дает возможность получить в неизменном виде исторические «именные» уравнения, например, уравнения в перемещениях Ляме и бигармоническое уравнение относительно функции Эри, и, во-вторых, становиться правомерной тензорная запись закона Гука в виде $s_{ij} = 2\cdot G\cdot e_{ij}$, указывающая на соосность девиаторов деформаций и напряжений в упругом случае.

Это открывало большие перспективы для достаточно простой экстраполяции этого результата из линейного случая, в частности, на нелинейные уравнения связи компонентов девиаторов напряжений и деформаций, основанные на той же гипотезе об их соосности с учетом дополнительной гипотезы о чисто линейном объемном деформировании материала [5, с. 408]:

$$s_{ij} = 2 \cdot G \cdot \varphi(e_{ij}), \ \sigma = K \cdot \Theta, \tag{11}$$

где $\varphi(\ )$ – некоторая нелинейная функция. Совершенно аналогично обстоял случай с малыми упругопластическими деформациями [3-6].

Фактически только с помощью подмены тензоров деформаций (1) на (2) А.А. Ильюшиным была создана общая теория механики твердого деформируемого тела только ради теории. Потому, что в математической механике твердого тела, как и в любой теоретическом разделе, совершенно не имеет значения какие задачи и какие уравнения решаются – главное, чтобы они были в математическом смысле не противоречивы, а их возможная связь с реальностью – это только мешающее всем обстоятельство.

Несколько непонятной выглядит процедура верификации теоретических решений конкретных краевых задач в научных работах, основанных на тензоре деформаций по А.А. Ильюшину (2) и «исправленном» обобщенном законе Гука (10) [4-6], который сам противоречит классическому пониманию касательных деформаций, как суммарного угла изменения между гранями элементарного параллелепипеда и координатными плоскостями [1; 2].

Отметим, что уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций, а также вязкоупругости и вязкоупугопластичности [4-6] основаны в свою очередь на тензоре деформаций по А.А. Ильюшину (2) и записи связи напряжений и деформаций в форме (11) или аналогичной ей, т.е. на гипотезе о соосности девиаторов.

Очевидно, что использование тензоров по Коши и по Ильюшину будут давать на практике совершено разные распределения деформаций.

Выводы. Пришло время существенного пересмотра и унификации уравнений механики твердого тела для физиков и инженеров. Необходимо:

- либо экспериментально обосновать применение тензора деформаций Ильюшина (2);
- либо подтвердить исходную запись тензора деформаций по Коши (1) и обобщенного закона Гука (3) и внести изменения в тензорные уравнения нелинейного деформирования твердого тела (11) и др., а так же прекратить тиражирование в учебной литературе тензора Ильюшина (2) под названием тензора Коши.

Список использованных источников

1. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. М.: Госстройиздат, 1957. 256 с.
2. Расчеты на прочность в машиностроении в 3 т. Т. 1: Теоретические основы и экспериментальные методы. Расчеты стержневых элементов конструкций при статической нагрузке / под ред. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность: в 2 ч. Ч. 1: Упруго-пластические деформации. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 377 с.
4. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев: Наукова думка, 1981. 496 с.
5. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. Минск: БГУ, 2011. 543 с.
6. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 576 с.
7. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.