УДК 539.3:517.51

РЕШЕНИЕ ОБОЩЕННОЙ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ДИСКА

Кравчук Александр Степанович

д-р физ.-мат. наук

Кравчук Анжелика Ивановна

канд. физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. С помощью теории аналитических функций и формул Колосова-Мусхелишвили решена задача двумерной теории упругости для диска в наибольшем возможном обобщении. Известное решение для нагруженного равномерным давлением диска обобщено на случай равновесия диска под действием неравномерного нормального радиального напряжения на его границе, представленного в виде ряда Фурье, а также равновесия диска с приложенной в его центре сосредоточенной силой и неравномерного напряжения на его границе. При решении задач применена методика, разработанная авторами, позволяющая достигать решения поставленных краевых задач для диска проще, чем это описано в классических монографиях Мусхелишвили и Амензаде.

Ключевые слова: аналитические функции; формулы Колосова-Мусхелишвили; комплексные числа; нагружение диска неравномерным напряжением.

SOLUTION OF GENERALISED FIRST FUNDAMENTAL BOUNDARY PROBLEM OF TWO-DIMENSIONAL THEORY OF ELASTICITY FOR AN ISOTROPIC ELASTIC DISC

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences

Kravchuk Anzhelica Ivanovna

candidate of physical and mathematical sciences

Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. The problem of the two-dimensional theory of elasticity for a disk was solved in an greatest possible generalization with the help of the theory of analytic functions and Kolosov-Muskhelishvili formulas solved. A known solution for the loaded disc under uniform pressure generalized to the case of balance disk under the influence of non-uniform normal radial stress on its boundary, represented as a Fourier series, and the balance of disc with point force at its center and irregular stresses on the boundary. A techniques developed by the authors was applied in solution of problems. It makes easier to solve of boundary value problems for the disk than it described in classical monographs of Muskhelishvili.

Key words: analytic functions; Kolosov-Muskhelishvili formulas; complex numbers; irregular loading disc stress.

Введение. Несмотря на большие достижения в области решения двумерных задач теории упругости с помощью уравнений Колосова-Мусхелишвили и теории аналитических функций ряд краевых задач был решен только в простейшем случае нагружения. В частности, Н.И. Мусхелишвили в своей классической монографии [1] сделал только методические замечания к вопросу о плоском напряженно-деформированном состоянии упругого диска под действием произвольной нагрузки на его границе, а задача о равновесии упругого диска под действием сосредоточенной силы в его центре и произвольной уравновешивающей нагрузки на его границе не рассматривалась даже с методической точки зрения.

Отметим, что предложенный Н.И. Мусхелишвили путь решения задачи в практической реализации крайне не удобен, т.к. требует использования непосредственно комплексных потенциалов, а не их производных. Данный подход был упрощен авторами и на основании этого упрощения были решены краевые задачи для упругого диска в предельном обобщении для действующих на границе нормальных нагрузок, а также с учетом возможности приложения сосредоточенной силы в центре диска.

Общие формулы Колосова-Мусхелишвили. Рассмотрим упругий диск радиуса R в плоскости $x_1 0 x_2$. Ось $0x_1$ направлена горизонтально. Обозначим рассматриваемую область через S^+, а ее границу через L. Формулы Колосова-Мусхелишвили в декартовых координатах для S^+ имеют вид [1; 2]:

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}=2\left[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}\right], \tag{1}$$

$$\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12}=2\cdot\left[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)\right], \tag{2}$$

$$2\mu\cdot\left(u_1+iu_2\right)=\kappa\cdot\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}, \tag{3}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – функции голоморфные в S^+, $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, κ – константа, определяемая видом напряженного состояния:

$$\kappa=\begin{cases}3-4\nu & \text{– при плоской деформации,}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{– при плоском напряженном состоянии.}\end{cases}$$

Исходя из общих формул [1; 2], комплексные аналитические функции, решающие основные задачи механики твердого тела для диска с приложенной в его центре силой, приобретают вид:

$$\varphi(z) = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi(1+\kappa)}\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot z^k,$$

$$\psi(z) = \kappa\frac{V_1 - iV_2}{2\pi(1+\kappa)}\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot z^k. \tag{4}$$

Уравнения Колосова-Мусхелишвили в полярной системе координат. Для решения первой основной краевой задачи для диска необходимо воспользоваться формулами Колосова-Мусхелишвили в полярной системе координат для того, что бы удовлетворить краевые условия по напряжениям, действующие на границе диска. Для этого воспользуемся известными формулами, связывающими напряжения в декартовых координатах с напряжениями в полярных координатах [1; 2]:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} + \sigma_{22},$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) \cdot e^{2i\theta}. \tag{5}$$

Вычитая из первого уравнения системы (5) второе, получаем:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} - (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) \cdot e^{2i\theta}\right). \tag{6}$$

Подставляя в (6) формулы (1) и (2), получаем выражение нормальных и касательных напряжений через комплексные аналитические функции (4):

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\varphi''(z) - \frac{z}{\bar{z}} \cdot \psi'(z). \tag{7}$$

Решение задачи о распределении напряжений в диске при отсутствии сосредоточенной силы в его центре и под действием нормальных радиальных напряжений, приложенных к границе дис-

ка в виде ряда Фурье. Исходя из постановки задачи и вида комплексных аналитических функций (4), получаем:

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k , \qquad \psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot z^k . \tag{8}$$

Подставляем (8) в (7), получаем уравнение:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}-i\sigma_{r\theta}=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot z^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} \cdot k \cdot \bar{z}^{k-1} - \\ -\sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot z^{k-1}-\frac{1}{\bar{\bar{z}}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot k \cdot z^k .\end{aligned} \tag{9}$$

В качестве краевого условия на границе отверстия необходимо удовлетворить условия $\sigma_{rr}\big|_{r=R} \neq 0$ и $\sigma_{r\theta}\big|_{r=R}=0$. Для простоты будем предполагать, что $\sigma_{rr}\big|_{r=R}$ – четная функция относительно θ.

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R}=\frac{A_0^*}{2}+\sum_{j=1}^{\infty} A_j^* \cdot \cos(j \cdot \theta), \tag{10}$$

где A_j^* – вещественные коэффициенты ряда Фурье, для которых выполнено:

$$A_j^*=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sigma_{rr}\big|_{r=R} \cdot \cos(j \cdot \theta) d\theta , \ j=\overline{0,\infty} . \tag{11}$$

Условием равновесия диска под действием $\sigma_{rr}\big|_{r=R} \neq 0$ и $\sigma_{r\theta}\big|_{r=R}=0$ (10) являются уравнения:

$$\begin{aligned}V_1+iV_2=-\oint_L \left(\sigma_{rr}\big|_{r=R}+i \cdot \sigma_{r\theta}\big|_{r=R}\right) d\tau=0 , \\ M=\oint_L \left(\sigma_{r\theta}\big|_{r=R} \cdot x-\sigma_{rr}\big|_{r=R} \cdot y\right) d\tau=0 .\end{aligned} \tag{12}$$

Разделяя вещественную и мнимую части в первом уравнении (12), получаем условия равновесия:

$$V_1 = -R\int_0^{2\pi}\left(\sigma_{rr}\big|_{r=R}\cos(\theta) - \sigma_{r\theta}\big|_{r=R}\cdot\sin(\theta)\right)d\theta = 0,\qquad(13)$$

$$V_2 = -R\int_0^{2\pi}\left(\sigma_{rr}\big|_{r=R}\cdot\sin(\theta) + \sigma_{r\theta}\big|_{r=R}\cdot\cos(\theta)\right)d\theta \equiv 0.$$

Из второго уравнения (12) и уравнения (10) получаем, что

$$M = R^2\int_0^{2\pi}\left(\sigma_{r\theta}\big|_{r=R}\cdot\cos(\theta) - \sigma_{rr}\big|_{r=R}\cdot\sin(\theta)\right)\cdot\cos(\theta)\,d\theta \equiv 0.\qquad(14)$$

Из (13) и (14) следует, что для равновесия диска достаточно:

$$A_1^* \equiv 0.\qquad(15)$$

Таким образом, выполнение (15) гарантирует равновесие диска под действием произвольной краевой нагрузки, заданной в виде (10), при отсутствии сосредоточенной силы в центре диска.

Подставляем в (9) уравнение границы отверстия радиуса R, т.е. $z = R\cdot e^{i\theta}$ и, исходя из краевого условия, получаем:

$$\frac{A_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^*\cdot\cos(j\cdot\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cdot k\cdot\left(R\cdot e^{i\theta}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{a_k}\cdot k\cdot\left(\overline{R\cdot e^{i\theta}}\right)^{k-1} -$$
$$-\sum_{k=2}^{\infty} a_k\cdot k\cdot(k-1)\cdot\left(R\cdot e^{i\theta}\right)^{k-1} - \frac{1}{\left(\overline{R\cdot e^{i\theta}}\right)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot k\cdot\left(R\cdot e^{i\theta}\right)^{k}.\qquad(16)$$

Ограничимся предположением, что $\operatorname{Im}(a_k) = \operatorname{Im} b(a_k) = 0$ и несколькими слагаемыми в (8) и (10), т.е. положим, что $a_{k,k=\overline{1,5}} \neq 0$, $b_{k,k=\overline{1,3}} \neq 0$ и $j = 0,...,4$ в (12), сгруппировав которые, окончательно получаем:

$$2a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot R \cdot \cos(\theta) - b_1 \cdot \cos(2\theta) -$$
$$-\left(a_4 \cdot 4 \cdot R^3 + b_2 \cdot 2 \cdot R\right) \cdot \cos(3\theta) - \left(a_5 \cdot 10 \cdot R^4 + b_3 \cdot 3 \cdot R^2\right) \cdot \cos(4\theta) =$$
$$= \frac{A_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{4} A_j^* \cdot \cos(j \cdot \theta).$$

(17)

$$a_2 \cdot 2 \cdot R \cdot \sin(\theta) + \left(a_3 \cdot 6 \cdot R^2 + b_1\right) \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \left(a_4 \cdot 12 \cdot R^3 + b_2 \cdot 2 \cdot R\right) \cdot \sin(3\theta) +$$
$$+ \left(a_5 \cdot 20 \cdot R^4 + b_3 \cdot 3 \cdot R^2\right) \cdot \sin(4\theta) = 0.$$

Для того чтобы оба уравнения (17) были тождественно выполнены, необходимо, чтобы была справедлива следующая система уравнений для коэффициентов $a_{k,k=\overline{1,5}}$ и $b_{k,k=\overline{1,3}}$:

$$a_1 = \frac{A_0^*}{4}, \quad a_2 = \frac{A_1^*}{2 \cdot R} = 0, \quad a_3 = \frac{A_2^*}{6 \cdot R^2}, \quad a_4 = \frac{A_3^*}{8 \cdot R^3}, \quad a_5 = \frac{A_4^*}{10 \cdot R^4},$$

(18)

$$b_1 = -A_2^*, \quad b_2 = -\frac{3}{4 \cdot R} A_3^*, \quad b_3 = -\frac{2}{3 \cdot R^2} A_4^*.$$

Зададим нагрузку в виде гипотрохоиды [1] (рис. 1, 2):

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R} = P \cdot \sqrt{\left(1 + m^2\right) + 2 \cdot m \cdot \cos((1+n)\theta)}, \qquad (19)$$

где P – произвольный нормирующий множитель, n – произвольное целое число, а m – вещественная константа, удовлетворяющая неравенству $0 \le m \le 1/n$.

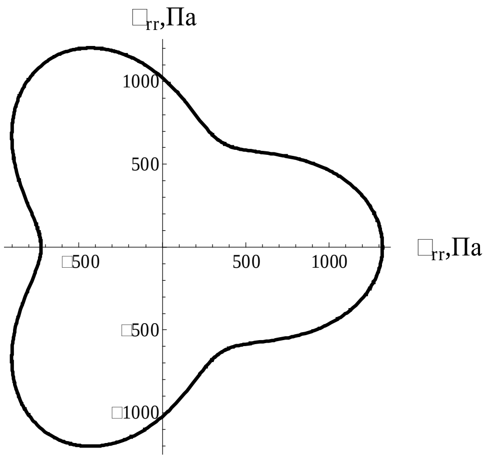

Рис. 1. Распределение напряжений на контуре диска
($P = 1000Па$, $n = 2$, $m = 0.3$)

Рассмотрим случай, когда в центре диска приложена сила. Пусть к центру диска приложена сосредоточенная сила, действующая, например, вдоль оси $0x_1$. Следовательно для решения задачи, необходимо использовать аналитические функции в виде (4) ($V_1 \neq 0$, $V_2 = 0$), при этом коэффициент A_1^* из (10) связан с величиной приложенной сосредоточенной силы соотношением:

$$A_1^* = -V_1/(\pi \cdot R). \qquad (20)$$

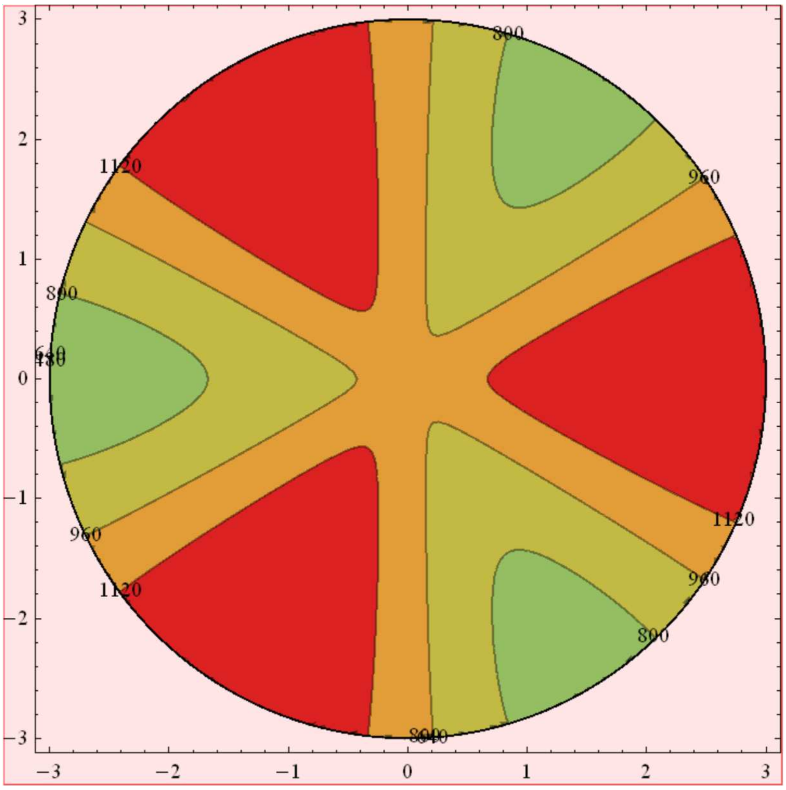

Рис. 2. Распределение напряжений σ_{rr} (7) внутри диска радиуса $R = 3$, под действием нагрузки $\sigma_{rr}\big|_{r=R}$ (19) ($P = 1000 Па$, $n = 2$, $m = 0.3$)

Для достижения равенства (20) при произвольном разложении в ряд Фурье используется нормирующий коэффициент P в (19). Кроме того коэффициент a_2 определяется уравнением:

$$a_2 = -\frac{(\kappa - 1)}{4\pi(1+\kappa)} \frac{V_1}{R^2}.$$

Выводы. Впервые поставлена и решена задача для диска с приложенной в его центре сосредоточенной силой и заданным на границе напряжением в виде разложения в ряд Фурье.

При решении задачи применена методика, разработанная авторами, позволяющая достигать решения поставленных краевых задач для диска проще, чем это описано в классических монографиях [1; 2].

Список использованных источников

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
2. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.