

УДК 539.3:517.51

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЕМ В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОГО ГЛАВНОГО ВЕКТОРА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРАНИЦЕ ОТВЕРСТИЯ

Кравчук Александр Степанович

д-р физ.-мат. наук

Кравчук Анжелика Ивановна

канд. физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. Установлено, что решение бигармонического уравнения в полярных координатах для сосредоточенной силы, действующей в плоскости и направленной вдоль оси Ox , совпадает с решением такой же задачи, полученным с помощью формул Колосова-Мусхелишвили. Зависимость решения для сосредоточенной силы от вида плоского напряженно-деформированного состояния обуславливается краевым условием на аксиальные деформации вокруг сосредоточенного источника. С использованием результатов этих предварительных исследований в статье впервые решена обобщенная задача Ляме определения напряжений и перемещений в плоскости с отверстием, на границе которого действуют произвольно распределенное нормальное напряжение, представленное в виде ряда Фурье.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение; формулы Колосова-Мусхелишвили; аналитические функции; визуализация решений; комплексная переменная; обобщенная задача Ляме.

GENERALIZED SOLUTIONS OF THE FIRST FUNDAMENTAL PROBLEM FOR A PLANE WITH A HOLE IN THE CASE OF NONZERO PRINCIPAL VECTOR OF FORCES APPLIED TO THE BOUNDARY OF HOLE

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences

Kravchuk Anzhelica Ivanovna

candidate of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. It was found that the solution of the biharmonic equation in polar coordinates for a concentrated force acting in the plane along the axis Ox , coincides with the solution of this problem which is obtained by the formula Kolosov-Muskhelishvili. The dependence of the solutions of the kind of plane stress-strain state is caused by boundary conditions on axial deformation around a point of application of source. Using the results of these preliminary studies in an article for the first time the Lamé generalized problem was solved (i.e. was defined of stress and displacement in the plane with a hole) when distributed on boundary normal stress, presented in the form of a Fourier series.

Key words: biharmonic equation; Kolosov-Muskhelishvili formulas; analytical functions; visualization of solution; complex variables; generalized Lamé problem.

Введение. В статье [1] установлено, что решение для сосредоточенной силы в плоскости, предложенное Н.И. Мухелишвили, зависит от вида напряженного состояния плоскости (плоское напряженное или плоская деформация). На первый взгляд это противоречит характеру решения плоских задач, т.к. известно, что оно сводится к бигармоническому уравнению, благодаря чему не зависит от упругих констант материала плоскости.

Поэтому при решении обобщенной первой основной задачи для отверстия в плоскости в начале данного исследования установлена справедливость результатов Н.И. Мухелишвили [2] для случая неравного нулю главного вектора сил, приложенных к границе отверстия. Далее с использованием этих результатов с помощью аналитических функций получено решение обобщенной задачи Ляме.

Решение бигармонического уравнения. Для исследования данного вопроса воспользуемся известным бигармоническим уравнением в полярной системе координат для функции напряжений $\varphi(r, \theta)$, приведенным в монографии Б.Н. Жемочкина [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (1)$$

В соответствии с ходом изложения материала в известной монографии Н.И. Мухелишвили, будем считать, что (1) выполнено для плоскости с круглым вырезом радиуса R . Будем считать, что в круглый вырез вставлен абсолютно жесткий диск, на который действует сила с главным вектором $(V_x, 0)$. Будем предполагать, что напряжения в плоскости исчезают на бесконечности, а граница абсолютно жесткого диска сцеплена с границей отверстия. Таким образом, выполнены следующие краевые условия:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = \frac{F}{R^2} \cdot \cos(\theta), \quad \varepsilon_{\theta\theta}|_{r=R} = 0, \quad (2)$$

где F – некоторая константа.

Будем считать, что для удовлетворения уравнения (1) и краевых условий (2) достаточно выбрать функцию $\varphi(r, \theta)$ в виде [4]:

$$\varphi(r, \theta) = \left(A_1 \cdot r^3 + A_2 \cdot r \cdot \ln(r) + \frac{A_3}{r} + A_4 \cdot r \right) \cdot \cos(\theta) + B \cdot r \cdot \theta \cdot \sin(\theta), \quad (3)$$

где $A_{i, i=\overline{1,4}}$ и B – вещественные константы. Непосредственной подстановкой (3) в (1) можно удостовериться, что (3) является бигармонической функцией.

Исходя из (3), для напряжений можно записать [3; 4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \left(2A_1 \cdot r + \frac{A_2}{r} - 2 \frac{A_3}{r^3} + \frac{2B}{r} \right) \cdot \cos(\theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \left(6A_1 \cdot r + \frac{A_2}{r} + 2 \frac{A_3}{r^3} \right) \cdot \cos(\theta), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = \left(2A_1 \cdot r + \frac{A_2}{r} - 2 \frac{A_3}{r^3} \right) \cdot \sin(\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

Исходя из того, что напряжения исчезают на бесконечности, в (3) и (4) необходимо положить $A_1 = A_4 = 0$. В связи с тем, что имеется слишком много констант, подлежащих определению. Согласно известным уравнениям равновесия:

$$V_x = -R \int_0^{2\pi} \left(\sigma_{rr}|_{r=R} \cos(\theta) - \sigma_{r\theta}|_{r=R} \cdot \sin(\theta) \right) d\theta, \quad (5)$$

$$V_y = -R \int_0^{2\pi} \left(\sigma_{rr}|_{r=R} \cdot \sin(\theta) + \sigma_{r\theta}|_{r=R} \cdot \cos(\theta) \right) d\theta = 0,$$

предположим, что $\left(\frac{A_2}{R} - 2 \frac{A_3}{R^3} + \frac{2B}{R} \right) = - \left(\frac{A_2}{R} - 2 \frac{A_3}{R^3} \right)$. Таким образом,

получаем:

$$B = -\left(A_2 - 2\frac{A_3}{R^2}\right). \quad (6)$$

Учитывая, что $\varepsilon_{\theta\theta}|_{r=R} = 0$, из уравнения обобщённого закона Гука для нормальных компонент напряжений и деформаций следует, что необходимо должно выполняться одно из уравнений [3]:

для плоского напряженного состояния:

$$(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr})|_{r=R} = 0, \quad (7)$$

или для плоской деформации:

$$((1-\nu) \cdot \sigma_{\theta\theta} - \nu \cdot \sigma_{rr})|_{r=R} = 0. \quad (8)$$

Подставляя (4) в (7) и (8), получаем для плоского напряженного состояния:

$$A_2 = -(\kappa - 1) \cdot \frac{A_3}{R^2}, \quad (9)$$

где

$$\kappa = \begin{cases} (3 - 4\nu) - \text{плоская деформация;} \\ \frac{(3 - \nu)}{(1 + \nu)} - \text{плоское напряженное состояние.} \end{cases} \quad (10)$$

Исходя из (4), (6) и (9), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left((\kappa + 3) - 2\frac{R^2}{r^2} \right) \frac{A_3}{R^2} \frac{1}{r} \cdot \cos(\theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left(-(\kappa - 1) + 2\frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \frac{A_3}{R^2} \cdot \frac{1}{r} \cos(\theta), \\ \sigma_{r\theta} &= -\left((\kappa - 1) + 2\frac{R^2}{r^2} \right) \frac{A_3}{R^2} \frac{1}{r} \cdot \sin(\theta). \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициент A_3 определяются из (11) и краевого условия (2):

$$A_3 = \frac{F}{(\kappa + 1)} R. \quad (12)$$

Исходя из (11), (12), а также первого уравнения равновесия (5), получаем равенства:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = \frac{F}{R^2} \cdot \cos(\theta), \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R} = -\frac{F}{R^2} \cdot \sin(\theta),$$

$$V_x = -R \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}|_{r=R} \cos(\theta) - \sigma_{r\theta}|_{r=R} \cdot \sin(\theta)) d\theta = -2\pi \frac{F}{R}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11), получаем распределение напряжений в плоскости с круглым вырезом, краевыми условиями (2) и главным вектором сил $(V_x, 0)$, приложенным к жесткому диску:

$$\sigma_{rr} = -\frac{V_x}{2\pi(\kappa+1)} \left((\kappa+3) - 2 \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{V_x}{2\pi(\kappa+1)} \left((\kappa-1) - 2 \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{r} \cos(\theta), \quad (14)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{V_x}{2\pi(\kappa+1)} \left((\kappa-1) + 2 \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin(\theta).$$

Необходимо отметить, исходя из анализа размерностей в (16), что в любой плоской задаче размерность компонент главного вектора сил V_x и V_y составляет Н/м, т.к. предполагается что плоскость имеет глубину равную 1м при решении плоской задачи,

Общие формулы Колосова-Мусхелишвили. Для плоскости с круглым вырезом S^- формулы в декартовых координатах имеют вид [1; 2]:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})}], \quad (15)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2 \cdot [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (16)$$

$$2\mu \cdot (u_x + iu_y) = \kappa \cdot \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (17)$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – функции, голоморфные в S^- , $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, i – комплексная единица, κ – константа, определяемая видом напряженного состояния (10).

Решение с помощью формул Колосова-Мусхелишвили задачи о действии силы на вставленную в отверстие жесткую шайбу того же радиуса, что и вырез. Будем предполагать, что шайба сцеплена с границей выреза и выполнены краевые условия (2). Воспользуемся формулой для определения деформации $\varepsilon_{\theta\theta}$ через компоненты перемещений в полярной системе координат (u_r, u_θ) :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right). \quad (18)$$

Воспользуемся формулами, связывающими компоненты перемещений в полярной системе координат с перемещениями в декартовой системе координат (u_x, u_y) [2]:

$$u_r + i \cdot u_\theta = (u_x + i \cdot u_y) \cdot e^{-i\theta}. \quad (19)$$

Полагая в (19) u_x и u_y константами, разделяя вещественную и мнимую часть и подставляя результат в (18), получаем:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (-u_x \cdot \sin(\theta) + u_y \cos(\theta)) + (u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta)) \right) = 0.$$

В связи с этим для удовлетворения краевого условия $\varepsilon_{\theta\theta}|_{r=R} = 0$ достаточно положить, что перемещения u_1 , u_2 являются постоянными по всей окружности отверстия, т.е. при $z = R \cdot e^{i\theta}$ получаем:

$$\frac{d}{d\theta} \left((u_1 + i u_2) \Big|_{z=R \cdot e^{i\theta}} \right) = 0. \quad (20)$$

Тогда из (17) и (20) следует:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\kappa \cdot \varphi(R \cdot e^{i\theta}) - R \cdot e^{i\theta} \overline{\varphi'(R \cdot e^{i\theta})} - \overline{\psi(R \cdot e^{i\theta})} \right) = 0. \quad (21)$$

Учитывая, что напряжения исчезают на бесконечности будем считать, что [2]:

$$\varphi(z) = A \cdot \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad \psi(z) = B \cdot \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\kappa \cdot A \cdot (\ln(R) + i\theta) - \bar{B} \cdot (\ln(R) - i\theta) + \kappa \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{R^k} e^{-ik\theta} - \right. \\ \left. - A \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \theta} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_k}{R^k} \cdot e^{i(k+2)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{R^k} e^{ik\theta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Можно установить, что для тождественного выполнения (23), достаточно чтобы $a_{k, k=1, \infty} = 0$, $b_1 = 0$, $\frac{b_2}{R^2} = -A$, $b_{k, k=3, \infty} = 0$, кроме того, должно быть выполнено уравнение:

$$\kappa \cdot A + \bar{B} = 0. \quad (24)$$

Учитывая, что [2]:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}, \quad (25)$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}) \cdot e^{2i\theta}.$$

Вычитаем из первого уравнения системы (25) второе и, используя (15) и (16), получаем:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\varphi''(z) - \frac{z}{z} \cdot \psi'(z). \quad (26)$$

Исходя из (26) с учетом (22) получаем:

$$V_x + iV_y = - \int_L \left(\sigma_{rr}|_{r=R} - i\sigma_{r\theta}|_{r=R} \right) d\tau = -2\pi \cdot (A - \bar{B}). \quad (27)$$

Таким образом, из (24) и (27) получаем:

$$A = -\frac{V_x + iV_y}{2\pi \cdot (1 + \kappa)}, \quad B = \kappa \frac{V_x - iV_y}{2\pi \cdot (1 + \kappa)}. \quad (28)$$

Перейдем к первому краевому условию в (2). Исходя из (27) получаем:

$$\operatorname{Re}(A) = \frac{F}{(1 + \kappa) \cdot R}, \quad \operatorname{Im}(A) = 0. \quad (29)$$

Из (28) и (29) следует, что

$$F = -\frac{V_x \cdot R}{2\pi}.$$

Исходя из (22), (28) и ранее полученных равенств $a_{k, k=1, \infty} = 0$, $b_1 = 0$,

$\frac{b_2}{R^2} = -A$, $b_{k, k=3, \infty} = 0$, можно записать аналитические выражения для

$\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$ и $\psi'(z)$:

$$\varphi'(z) = -\frac{V_x + iV_y}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \cdot \frac{1}{z}, \quad (30)$$

$$\varphi''(z) = \frac{V_x + iV_y}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \cdot \frac{1}{z^2}, \quad (31)$$

$$\psi'(z) = \kappa \frac{V_x - iV_y}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \cdot \frac{1}{z} - 2 \frac{V_x + iV_y}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \frac{R^2}{z^3}. \quad (32)$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow 0$ в (30)-(32), получаем вид аналитических функций $\varphi_0'(z)$, $\varphi_0''(z)$ и $\psi_0'(z)$, описывающих распределение напряжений для сосредоточенной силы, приложенной в начале координат. Исходя из результатов (30)-(32), получаем, что $\varphi_0'(z)$ и $\psi_0'(z)$ имеют вид [1; 2]:

$$\varphi_0(z) = -\frac{V_x + iV_y}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \cdot \ln(z), \quad \psi_0(z) = \kappa \frac{V_x - iV_y}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \cdot \ln(z).$$

Фактически установлено, что решение краевой задачи для сцепленного абсолютно жёсткого диска и упругой полуплоскости, а также для сосредоточенной силы (полученного предельным переходом при $R \rightarrow 0$) зависит от типа напряженного состояния, поскольку неявно предполага-

ется, что контур отверстия не деформируется, т.е. используется краевое условие по перемещениям (23).

Возвращаясь к проверке решения (14) бигармонического уравнения, подставим (30)-(32) в (26) и используя замену $z = r \cdot e^{i\theta}$, получаем для случая $V_y = 0$:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = -\frac{V_x}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \left(2e^{-i\theta} + e^{i\theta} + \kappa \cdot e^{i\theta} - 2\frac{R^2}{r^2} e^{-i\theta} \right) \cdot \frac{1}{r}. \quad (33)$$

Выделяя из (33) вещественную и мнимую части, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{V_x}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \left((\kappa + 3) - 2\frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{r} \cos(\theta), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{V_x}{2\pi \cdot (1 + \kappa)} \left((\kappa - 1) + 2\frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{r} \sin(\theta). \end{aligned} \quad (34)$$

Отметим, что распределение напряжений (34), полученных с помощью формул Колосова-Мусхелишвили, полностью совпадает с распределением напряжений (14), полученных с помощью непосредственного решения бигармонического уравнения в полярных координатах для случая $V_y = 0$, а зависимость решения плоской задачи от вида напряженно-деформированного состояния обусловлена удовлетворением краевого условия по деформациям (21), учитывающего специфику модели сосредоточенного источника.

Решение первой основной задачи с помощью аналитических функций для круглого отверстия в упругой изотропной плоскости с произвольным распределением давления, заданного на границе отверстия в виде ряда Фурье. Будем предполагать, напряжение исчезает на бесконечности, т.е. выполнено (22) с учетом (28). Кроме того, трение на границе отверстия отсутствует ($\sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0$), и для простоты

будем предполагать, что $\sigma_{rr}|_{r=R}$ – четная функция относительно θ .

Исходя из краевых условий задачи, исходя из (5), получаем:

$$\begin{aligned}
 V_x &= -R \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}|_{r=R} \cos(\theta) - \sigma_{r\theta}|_{r=R} \cdot \sin(\theta)) d\theta = \\
 &= -R \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}|_{r=R} \cos(\theta) d\theta, \\
 V_y &= 0.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Соответственно [5]:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = \frac{A_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^* \cdot \cos(j \cdot \theta), \tag{36}$$

где A_j^* – вещественные коэффициенты ряда Фурье, для которых выполнено:

$$A_j^* = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma_{rr}|_{r=R} \cdot \cos(j \cdot \theta) d\theta, \quad j = \overline{0, \infty}. \tag{37}$$

Исходя из (22), (26), (28) и (35), можно получить:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta})|_{r=R} &= \frac{b_1}{R^2} + \left(2 \frac{b_2}{R^2} - \frac{V_x}{\pi \cdot (1 + \kappa)} \right) \cdot \frac{e^{-i\theta}}{R} - \frac{V_x}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\theta}}{R} - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \frac{a_k \cdot e^{-i(k+1)\theta}}{R^{k+1}} + k \frac{\overline{a_k} \cdot e^{i(k+1)\theta}}{R^{k+1}} \right) - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} \left(k(k+1) \frac{a_k}{R^{k+1}} \cdot e^{-i(k+1)\theta} - (k+2) \frac{b_{k+2} \cdot e^{-i \cdot (k+1) \cdot \theta}}{R^{k+3}} \right).
 \end{aligned} \tag{38}$$

Разделяя в (38) вещественную и мнимую части, получаем два очевидных уравнения:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left[\frac{b_1}{R^2} + \left(2 \frac{b_2}{R^2} - \frac{V_x}{\pi \cdot (1 + \kappa)} \right) \cdot \frac{e^{-i\theta}}{R} - \frac{V_x}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\theta}}{R} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \frac{a_k \cdot e^{-i(k+1)\theta}}{R^{k+1}} + k \frac{\overline{a_k} \cdot e^{i(k+1)\theta}}{R^{k+1}} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left(k(k+1) \frac{a_k}{R^{k+1}} \cdot e^{-i(k+1)\theta} - (k+2) \frac{b_{k+2} \cdot e^{-i \cdot (k+1) \cdot \theta}}{R^{k+3}} \right) \right] = \sigma_{rr} \Big|_{r=R},
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \left[\frac{b_1}{R^2} + \left(2 \frac{b_2}{R^2} - \frac{V_x}{\pi \cdot (1 + \kappa)} \right) \cdot \frac{e^{-i\theta}}{R} - \frac{V_x}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\theta}}{R} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \frac{a_k \cdot e^{-i(k+1)\theta}}{R^{k+1}} + k \frac{\overline{a_k} \cdot e^{i(k+1)\theta}}{R^{k+1}} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left(k(k+1) \frac{a_k}{R^{k+1}} \cdot e^{-i(k+1)\theta} - (k+2) \frac{b_{k+2} \cdot e^{-i \cdot (k+1) \cdot \theta}}{R^{k+3}} \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Используя очевидные подстановки $a_k = \operatorname{Re}(a_k) + i \cdot \operatorname{Im}(a_k)$, $b_k = \operatorname{Re}(b_k) + i \cdot \operatorname{Im}(b_k)$ и $e^{i(k+1)\theta} = \cos((k+1) \cdot \theta) + i \cdot \sin((k+1) \cdot \theta)$, в (39) можно получить две вещественные системы уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\operatorname{Re}(b_1)}{R^2} + \left(2 \frac{\operatorname{Re}(b_2)}{R^3} - \left(\frac{1}{(1+\kappa)} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{V_x}{\pi \cdot R} \right) \cdot \cos(\theta) + 2 \frac{\operatorname{Im}(b_2)}{R^3} \cdot \sin(\theta) - \\
& - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\operatorname{Re}(a_k)}{R^{k+1}} \cdot \cos((k+1) \cdot \theta) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\operatorname{Im}(a_k)}{R^{k+1}} \cdot \sin((k+1) \cdot \theta) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{\operatorname{Re}(a_k)}{R^{k+1}} \cdot \cos((k+1) \cdot \theta) - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{\operatorname{Im}(a_k)}{R^{k+1}} \cdot \sin((k+1) \cdot \theta) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \frac{\operatorname{Re}(b_{k+2})}{R^{k+3}} \cdot \cos((k+1) \cdot \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \frac{\operatorname{Im}(b_{k+2})}{R^{k+3}} \cdot \sin((k+1) \cdot \theta) = \\
& = \frac{A_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^* \cdot \cos(j \cdot \theta),
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\operatorname{Im}(b_1)}{R^2} + \left(\left(\frac{1}{(1+\kappa)} - \frac{1}{2} \right) \frac{V_x}{\pi \cdot R} - 2 \frac{\operatorname{Re}(b_2)}{R^3} \right) \cdot \sin(\theta) + 2 \frac{\operatorname{Im}(b_2)}{R^3} \cdot \cos(\theta) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{\operatorname{Im}(a_k)}{R^{k+1}} \cos((k+1) \cdot \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{\operatorname{Re}(a_k)}{R^{k+1}} \sin((k+1) \cdot \theta) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \frac{\operatorname{Im}(b_{k+2})}{R^{k+3}} \cos((k+1) \cdot \theta) - \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \frac{\operatorname{Re}(b_{k+2})}{R^{k+3}} \sin((k+1) \cdot \theta) = 0.
\end{aligned}$$

Используя (35), (36) и ортогональность $\cos(n \cdot \theta)$ и $\cos(j \cdot \theta)$ при $n \neq j$, получаем очевидное равенство:

$$\begin{aligned}
V_x &= -R \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}|_{r=R} \cos(\theta) d\theta = -R \int_0^{2\pi} \left(\frac{A_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^* \cdot \cos(j \cdot \theta) \right) \cos(\theta) d\theta = \\
& = -A_1^* \cdot R \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 d\theta = -A_1^* \cdot R \cdot \pi.
\end{aligned} \tag{41}$$

Подставляя (41) в (40) и выделяя уравнения для коэффициентов при одинаковых $\cos(k \cdot \theta)$ и $\sin(k \cdot \theta)$, получаем систему уравнений (огра-

начимся несколькими первыми слагаемыми в (22), т.е. $a_{k,k=4,\infty} = b_{k,k=6,\infty} = 0$):

- полагая $j = 0$ в правой части первого уравнения (40), определим коэффициент b_1 :

$$\operatorname{Re}(b_1) = \frac{A_0^*}{2} R^2, \quad \operatorname{Im}(b_1) = 0; \quad (42)$$

- полагая $j = 1$ в правой части первого уравнения (40), получаем из системы (40) непротиворечивую систему из четырех уравнений для определения вещественной и мнимой части b_2 :

$$\operatorname{Re}(b_2) = \left(1 - \left(\frac{1}{(1+\kappa)} + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot \frac{A_1^*}{2} R^3, \quad \operatorname{Im}(b_2) = 0, \quad (43)$$

$$\operatorname{Re}(b_2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(1+\kappa)}\right) \frac{A_1^*}{2} R^3, \quad \operatorname{Im}(b_2) = 0;$$

- полагая $j = 2$ и $k = 1$ в системе (40), получаем систему из четырех уравнений для определения a_1 и b_3 (их вещественной и мнимой части):

$$-4 \operatorname{Re}(a_1) + 3 \frac{\operatorname{Re}(b_3)}{R^2} = A_2^* \cdot R^2, \quad -4 \operatorname{Im}(a_1) + 3 \frac{\operatorname{Im}(b_3)}{R^2} = 0, \quad (44)$$

$$-2 \cdot \operatorname{Im}(a_1) + 3 \frac{\operatorname{Im}(b_3)}{R^2} = 0, \quad 2 \operatorname{Re}(a_1) - 3 \frac{\operatorname{Re}(b_3)}{R^2} = 0;$$

- полагая $j = 3$ и $k = 2$ в системе (40), получаем систему из четырех уравнений для определения a_2 и b_4 :

$$-10 \cdot \operatorname{Re}(a_2) + 4 \frac{\operatorname{Re}(b_4)}{R^2} = A_3^* \cdot R^3, \quad -10 \cdot \operatorname{Im}(a_2) + 4 \frac{\operatorname{Im}(b_4)}{R^2} = 0, \quad (45)$$

$$-6 \cdot \operatorname{Im}(a_2) + 4 \frac{\operatorname{Im}(b_4)}{R^2} = 0, \quad 6 \cdot \operatorname{Re}(a_2) - 4 \frac{\operatorname{Re}(b_4)}{R^2} = 0;$$

- полагая $j = 4$ и $k = 3$ в системе (40), получаем систему из четырех уравнений для определения комплексных значений a_3 и b_5 :

$$\begin{aligned} -18 \cdot \operatorname{Re}(a_3) + 5 \frac{\operatorname{Re}(b_5)}{R^2} &= A_4^* \cdot R^4, & -18 \cdot \operatorname{Im}(a_3) + 5 \frac{\operatorname{Im}(b_5)}{R^2} &= 0, \\ -12 \cdot \operatorname{Im}(a_3) + 5 \frac{\operatorname{Im}(b_5)}{R^2} &= 0, & 12 \frac{\operatorname{Re}(a_3)}{R^4} - 5 \frac{\operatorname{Re}(b_5)}{R^6} &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Из систем (42)-(43) следует, что $\operatorname{Im}(a_{k,k=\overline{1,3}}) = \operatorname{Im}(b_{k,k=\overline{1,5}}) = 0$, т.е. все коэффициенты в (22) являются вещественными при решении указанной краевой задачи. Кроме того, непосредственно решив (42)-(43), можно получить выражение коэффициентов в разложениях (22) через коэффициенты ряда Фурье (36) в следующем виде

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{A_2^*}{2} \cdot R^2, & a_2 &= -\frac{A_3^*}{4} \cdot R^3, & a_3 &= -\frac{A_4^*}{6} \cdot R^4, \\ b_1 &= \frac{A_0^*}{2} R^2, & b_2 &= \left(1 - \left(\frac{1}{(1+\kappa)} + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot \frac{A_1^*}{2} R^3, \\ b_3 &= -\frac{A_2^*}{3} \cdot R^4, & b_4 &= -\frac{3}{8} \cdot A_3^* \cdot R^5, & b_5 &= -\frac{2}{5} \cdot A_4^* \cdot R^6. \end{aligned} \quad (43)$$

Если в качестве $\sigma_{rr}|_{r=R}$ выбрать один раз непрерывно дифференцируемую на интервале $(-\pi, \pi)$ функцию, модуль производной которой на всем интервале ограничен некоторой вещественной константой

$M = \sup_{\theta \in (-\pi, \pi)} \left| \frac{d^2}{d\theta^2} (\sigma_{rr}|_{r=R}) \right|$, то для коэффициентов ряда Фурье (36) будет

выполнена оценка сверху [6]:

$$|A_j^*| \leq \frac{M}{j^2}. \quad (44)$$

Из (22) и (43) очевидно, что для $a_{k,k=\overline{1,3}}$ и $b_{k,k=\overline{1,5}}$ справедливы оценки:

$$\left| \frac{a_k}{z^k} \right| = \frac{|a_k|}{R^k} \leq \alpha \cdot |A_k^*| \cdot R \quad \text{и} \quad \left| \frac{b_k}{z^k} \right| = \frac{|b_k|}{R^k} \leq \beta \cdot |A_k^*| \cdot R. \quad (45)$$

Учитывая, что α и β - вещественные константы, удовлетворяющие неравенствам $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$, то из (44) и (45) будет следовать оценка для $a_{k,k=1,3}$ и $b_{k,k=1,5}$:

$$\left| \frac{a_k}{z^k} \right| = \frac{|a_k|}{R^k} \leq \frac{M \cdot R}{j^2} \quad \text{и} \quad \left| \frac{b_k}{z^k} \right| = \frac{|b_k|}{R^k} \leq \frac{M \cdot R}{j^2}. \quad (46)$$

Если предположить, что (44) и (45) выполнены для любого $k = \overline{1, \infty}$, то (46) будет являться условием равномерной сходимости степенных рядов (22) по признаку Вейерштрасса [5].

В качестве численного примера для построения распределения напряжений при заданной на контуре нагрузке используем функцию $P \cdot \theta^2$ на интервале $(-\pi, \pi)$, где P - вещественный масштабирующий коэффициент, выбираемый пользователем исходя из соответствия величины, реально действующего на контуре отверстия напряжения $\sigma_{rr}|_{r=R}$ (Рисунок 1). Краевое распределение напряжений $\sigma_{rr}|_{r=R} = P \cdot \theta^4$ имеет известное разложение в ряд Фурье с коэффициентами [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_{r=R} = & \frac{P}{5} \pi^4 - 4 \cdot (\pi^2 - 6) \cdot P \cdot \cos(\theta) + \left(\pi^2 - \frac{3}{2} \right) \cdot P \cdot \cos(2 \cdot \theta) - \\ & - \frac{4}{27} \cdot (3 \cdot \pi^2 - 2) \cdot P \cdot \cos(3 \cdot \theta) + \frac{1}{32} \cdot (8 \cdot \pi^2 - 3) \cdot P \cdot \cos(4 \cdot \theta) \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Из (47) очевидно, что коэффициенты A_j^* для (43) определяются следующим образом (Рисунок 2):

$$\begin{aligned} A_0^* = 2 \cdot \frac{P}{5} \pi^4, \quad A_1^* = -4 \cdot (\pi^2 - 6) \cdot P, \quad A_2^* = \left(\pi^2 - \frac{3}{2} \right) \cdot P, \\ A_3^* = -\frac{4}{27} \cdot (3 \cdot \pi^2 - 2) \cdot P, \quad A_4^* = \frac{1}{32} \cdot (8 \cdot \pi^2 - 3) \cdot P. \end{aligned} \quad (48)$$

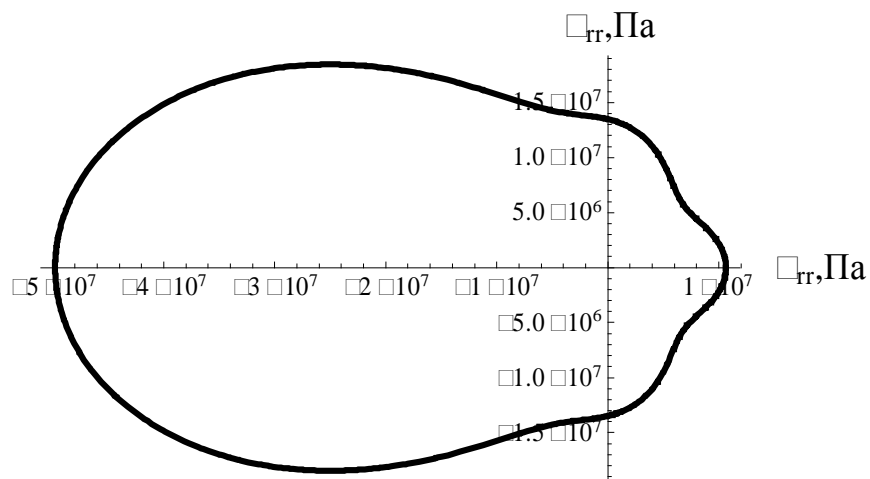


Рисунок 1. Распределение приложенного к краю отверстия напряжения $\sigma_{rr}|_{r=R}$, приближенного в смысле отрезка ряда (36) с коэффициентами из (47) и $P = 10^5$ Па

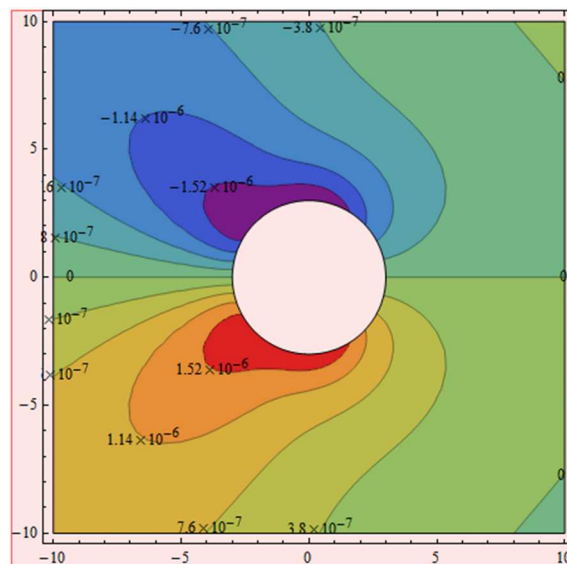


Рисунок 2. Распределение перемещений u_y в соответствии с (17) ($E = 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$ при плоском напряженном состоянии)

Выводы. Установлено, что решение бигармонического уравнения в полярных координатах для сосредоточенной силы, действующей в плоскости и направленной вдоль оси Ox , совпадает с решением такой же задачи, полученным с помощью формул Колосова-Мусхелишвили.

Установлено, что зависимость решения для сосредоточенной силы от вида плоского напряженно-деформированного состояния обуславли-

вается краевым условием на аксиальные деформации вокруг сосредоточенного источника.

В статье впервые решена задача для определения напряжений и перемещений в плоскости с отверстием, на границе которого действуют произвольно распределенные напряжения, представленные в виде ряда Фурье.

Список использованных источников

1. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Визуализация некоторых решений первой основной краевой задачи механики твердого тела с помощью аналитических функций для изотропной упругой плоскости с отверстием или сосредоточенными нагрузками // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2015. № 3. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/3-2015/Kravchuk-Kravchuk.pdf>
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. М.: Госстройиздат, 1957. 256 с.
4. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 389 с.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981. 448 с.