

УДК 004.92

**ВИЗУАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ
ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ
ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЕМ
ИЛИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ**

Кравчук Александр Степанович

д-р физ.-мат. наук

Кравчук Анжелика Ивановна

канд. физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. С помощью теории аналитических функций и формул Колосова-Мусхелишвили решен ряд стандартных задач двумерной теории упругости для плоскости с отверстием. Установлено, что применение системы Mathematica для визуализации решений поставленных задач значительно облегчается тем, что нет необходимости аналитически отделять вещественные и мнимые части получаемых выражений в формулах Колосова-Мусхелишвили, а само общее решение строиться в виде рядов с комплексными членами. Установлено, что распределения напряжений в частности для случая сосредоточенной силы зависят от вида напряженного состояния плоскости, что не характерно для решений первых основных краевых задач в двумерном случае.

Ключевые слова: аналитические функции; формулы Колосова-Мусхелишвили; комплексные числа; задача Ляме; задача Гадолина; растяжение плоскости с отверстием.

**VISUALIZATION OF SOME SOLUTIONS OF THE FIRST FUNDAMENTAL
PROBLEM OF SOLID MECHANICS BY ANALYTICAL FUNCTIONS
FOR ISOTROPIC ELASTIC PLANE WITH A HOLE
OR A CONCENTRATED LOAD**

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences

Kravchuk Anzhelica Ivanovna

candidate of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. A number of standard problems of two-dimensional theory of elasticity for a plane with a hole were solved using the theory of analytic functions and formulas Kolosov-Muskhelishvili. It was found that the application of program «Mathematica» for visualization of solutions much easier by the fact that there is no need to analytically separate the real and imaginary parts of the expressions obtained by Kolosov-Muskhelishvili formulas, and the general solution is constructed as a series with complex terms. It was found that the stress distribution for the last example of the load, as well as for the case of a concentrated force in plane depend on the type of stress state of plane, which is not typical for the solutions of the first basic boundary problem in the two-dimensional case.

Key words: analytic functions; Kolosov-Muskhelishvili formulas; complex numbers; Lamé task; Gadolin task; tensile plane with a hole.

Введение. При аналитическом решении задач теории упругости для общего случая трехмерных тел и краевых условий возникают большие математические затруднения. Это обстоятельство вынуждает, используя различные оценочные подходы, переходить к решению задач плоской теории упругости [1].

Наибольшие результаты в области решения двумерных задач теории упругости были достигнуты на основе применения уравнений Колосова-Мусхелишвили и теории аналитических функций. В настоящее время применение этого метода решения краевых задач теории упругости постепенно забывается, т.к. исследователи постепенно теряют к нему интерес из-за необходимого большого объема ручной работы.

Однако в настоящее время в связи с широким распространением программ компьютерной математики это направление в решении краевых задач может быть восстановлено, что объясняется возможностью автоматизации аналитических преобразований и наличия развитых средств визуализации результатов решения краевых задач.

Общие формулы Колосова-Мусхелишвили. Рассмотрим упругую плоскость x_1Ox_2 . Ось Ox_1 направлена горизонтально. Плоскость имеет круглый вырез радиуса R . Обозначим рассматриваемую область через S^- , а ее границу через L . Формулы Колосова-Мусхелишвили в декартовых координатах для S^- имеют вид [2; 3]:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad (1)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 \cdot [z\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (2)$$

$$2\mu \cdot (u_1 + iu_2) = \kappa \cdot \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (3)$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – функции, голоморфные в S^- , $\mu = \frac{E}{1+\nu}$, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, κ – константа, определяемая видом напряженного состояния:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{при плоской ддеформации,} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{при плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

В данной статье будем решать краевые задачи для плоскости с отверстием и плоскости с сосредоточенными силами, при отсутствии вращения на бесконечности. Исходя из общих формул [2; 3], при отсутствии вращения на бесконечности комплексные аналитические функции, решающие основные задачи механики твердого тела, приобретают вид:

$$\varphi(z) = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z) + \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad (4)$$

$$\psi(z) = \kappa \frac{V_1 - iV_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{-2i\alpha} \cdot z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}.$$

Отметим, что решение первой основной краевой задачи, как с использованием функции напряжений Эри, так и с использованием формул Колосова-Мусхелишвили (1) и (2), не зависит от упругих характеристик твердых тел.

Уравнения Колосова-Мусхелишвили в полярной системе координат. Для решения первой основной краевой задачи для кругового отверстия необходимо воспользоваться формулами Колосова-Мусхелишвили в полярной системе координат для того, что бы удовлетворить краевые условия по напряжениям, действующие границе отверстия. Для этого воспользуемся известными формулами, связывающими напряжения в декартовых координатах с напряжениями в полярных координатах [2; 3]:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) \cdot e^{2i\theta}.$$

Вычитаем из первого уравнения системы (5) второе, получаем:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} - (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) \cdot e^{2i\theta} \right) \quad (6)$$

Подставляя в (6) формулы (1) и (2), получаем выражение нормальных и касательных напряжений через комплексные аналитические функции (4):

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\varphi''(z) - \frac{z}{z} \cdot \psi'(z) \quad (7)$$

Визуализация решения задачи о распределении напряжений у отверстия, свободного от нагрузок при растяжении плоскости вдоль оси Ox_1 . Исходя из постановки задачи и вида комплексных аналитических функций (4), получаем при $\alpha = 0$ и $\sigma_2 = 0$:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma_1}{4} \cdot z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad \psi(z) = -\frac{\sigma_1}{2} \cdot z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} \quad (8)$$

Подставляем (8) в (7), получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = & \left(\frac{\sigma_1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_k}{z^{k+1}} \right) + \left(\frac{\sigma_1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_k}}{z^{k+1}} \right) - \\ & - z \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_k}{z^{k+2}} \right) - \frac{z}{z} \cdot \left(-\frac{\sigma_1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_k}{z^{k+1}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В качестве краевого условия на границе отверстия необходимо удовлетворить условиям $\sigma_{rr}|_{r=R} = 0$, $\sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0$. Поэтому, подставляем в (9) уравнение границы отверстия радиуса R , т.е. $z = R \cdot e^{i\theta}$ и, исходя из краевого условия, получаем:

$$\frac{\sigma_1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{a_k}{(R \cdot e^{i\theta})^{k+1}} + \frac{\overline{a_k}}{(\overline{R \cdot e^{i\theta}})^{k+1}} + (k+1) \frac{a_k}{(R \cdot e^{i\theta})^{k+1}} \right) - \frac{(R \cdot e^{i\theta})}{(\overline{R \cdot e^{i\theta}})} \cdot \left(-\frac{\sigma_1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_k}{(R \cdot e^{i\theta})^{k+1}} \right) = 0. \quad (10)$$

Ограничимся несколькими слагаемыми в (8), т.е. положим $k = 1, \dots, 3$ в (10) и, сгруппировав которые, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_1}{2} + \frac{b_1}{R^2} \right) + 2 \frac{b_2}{R^3} \cdot e^{-i\theta} + \left(3 \frac{b_3}{R^4} \cdot e^{-2i\theta} - 3 \frac{a_1}{R^2} e^{-2i\theta} \right) + \\ & \quad + \left(\frac{\sigma_1}{2} e^{2i\theta} - \frac{\overline{a_1}}{R^2} e^{2i\theta} \right) - \\ & \quad - 2 \left(\frac{a_2}{(R \cdot e^{i\theta})^3} + \frac{\overline{a_2}}{(\overline{R \cdot e^{i\theta}})^3} + 3 \frac{a_2}{(R \cdot e^{i\theta})^3} \right) \\ & \quad - 3 \left(\frac{a_3}{(R \cdot e^{i\theta})^4} + \frac{\overline{a_3}}{(\overline{R \cdot e^{i\theta}})^4} + 4 \frac{a_3}{(R \cdot e^{i\theta})^4} \right) + 4 \frac{b_4}{R^5} \cdot e^{-3i\theta} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для того, чтобы (11) было тождественно выполнено, необходимо, чтобы была справедлива следующая система уравнений:

$$a_1 = \frac{\sigma_1}{2} R^2, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad (12)$$

$$b_1 = -\frac{\sigma_1}{2} R^2, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{\sigma_1}{2} R^4.$$

Кроме того, дополнительно к (12), выполняются равенства $a_{k, k=4, \infty} = 0$, и $b_{k, k=4, \infty} = 0$. Подставляя (12) в (8), получаем:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma_1}{4} \cdot z + \frac{\sigma_1 \cdot R^2}{2} \frac{1}{z}, \quad \psi(z) = -\frac{\sigma_1}{2} \cdot z - \frac{\sigma_1 \cdot R^2}{2} \frac{1}{z} + \frac{\sigma_1 \cdot R^4}{2} \frac{1}{z^3}. \quad (13)$$

Отметим, что для отображения распределения напряжений с помощью системы Mathematica достаточно использовать уравнения (1)-(3) и конкретный вид комплексных аналитических функций (13), не выделяя вещественные и комплексные части. Определять константы, входящие в (3) и определяющие механические параметры изотропной плоскости, необходимо только тогда, когда исследователь нуждается в отображении перемещений или деформаций (Рисунок 1).

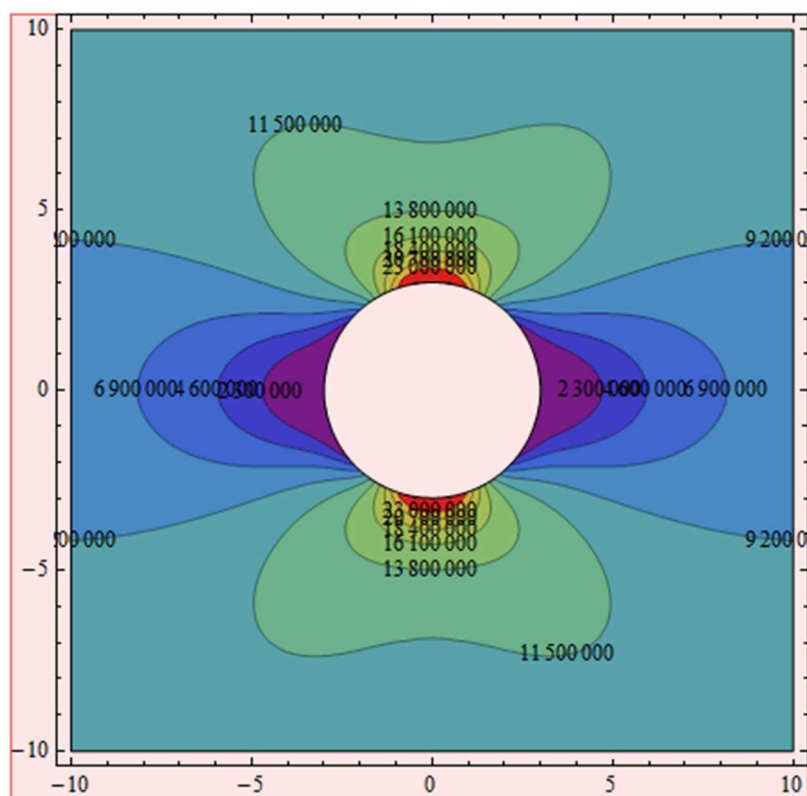


Рисунок 1. Распределение напряжений σ_{11} при растяжении плоскости приложенными на бесконечности равномерно распределенными напряжениями $\sigma_1 = 10^7 \text{ Па}$, действующими на площадках перпендикулярных направлению Ox_1

Визуализация решения задачи о распределении напряжений у отверстия, свободного от нагрузок при растяжении вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений, одно из которых наклонено к оси Ox_1 на угол $\alpha \neq 0$. Исходя из постановки задачи и вида комплексных аналитических функций (4), получаем при $\alpha \neq 0$ и $\sigma_2 \neq 0$:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad (14)$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{-2i\alpha} \cdot z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}.$$

Подставляем (14) в (7), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = & \left(\frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_k}{z^{k+1}} \right) + \left(\frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_k}}{z^{k+1}} \right) - \\ & - z \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_k}{z^{k+2}} \right) - \\ & - \frac{z}{z} \cdot \left(-\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{-2i\alpha} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_k}{z^{k+1}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Как и в предыдущем примере в качестве краевых условий на границе отверстия необходимо удовлетворить условиям $\sigma_{rr}|_{r=R} = 0$, $\sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0$. Поэтому подставляем в (15) уравнение границы отверстия радиуса R , т.е. $z = R \cdot e^{i\theta}$ и, исходя из упомянутого краевого условия, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R^{k+1}} \cdot \left(a_k \cdot e^{-i(k+1)\theta} + \overline{a_k} \cdot e^{i(k+1)\theta} + (k+1) \cdot a_k \cdot e^{-i(k+1)\theta} \right) + \\ & + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{-2i\alpha} \cdot e^{2 \cdot i\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_k \cdot e^{-i(k-1)\theta}}{R^{k+1}} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Ограничимся несколькими слагаемыми в (14), т.е. положим $k = 1, \dots, 3$
в (16):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \\
 & - \left(\frac{1}{R^2} \cdot a_1 \cdot e^{-2i\theta} + \frac{2}{R^3} \cdot a_2 \cdot e^{-3i\theta} + \frac{3}{R^4} \cdot a_3 \cdot e^{-4i\theta} \right) + \\
 & - \left(\frac{1}{R^2} \cdot \bar{a}_1 \cdot e^{2i\theta} + \frac{2}{R^3} \cdot \bar{a}_2 \cdot e^{3i\theta} + \frac{3}{R^4} \cdot \bar{a}_3 \cdot e^{4i\theta} \right) - \\
 & - \left(\frac{2}{R^2} \cdot a_1 \cdot e^{-2i\theta} + \frac{2 \cdot 3}{R^3} \cdot a_2 \cdot e^{-3i\theta} + \frac{3 \cdot 4}{R^4} \cdot a_3 \cdot e^{-4i\theta} \right) + \\
 & + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{-2i\alpha} \cdot e^{2i\theta} + \\
 & + \frac{b_1}{R^2} + 2 \frac{b_2 \cdot e^{-i\theta}}{R^3} + 3 \frac{b_3 \cdot e^{-2i\theta}}{R^4} = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Сгруппировав в (17) слагаемые по степеням $e^{i\theta}$, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{b_1}{R^2} + \\
 & + 2 \frac{b_2 \cdot e^{-i\theta}}{R^3} - 3 \cdot \left(\frac{a_1}{R^2} - \frac{b_3}{R^4} \right) \cdot e^{-2i\theta} - \frac{8}{R^3} \cdot a_2 \cdot e^{-3i\theta} - \frac{15}{R^4} \cdot a_3 \cdot e^{-4i\theta} + \\
 & - \left(\left(\frac{\bar{a}_1}{R^2} - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{-2i\alpha} \right) \cdot e^{2i\theta} + \frac{2}{R^3} \cdot \bar{a}_2 \cdot e^{3i\theta} + \frac{3}{R^4} \cdot \bar{a}_3 \cdot e^{4i\theta} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Для того, чтобы (18) было тождественно выполнено, необходимо, чтобы была справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{R^2}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{2i\alpha}, \quad a_2 = 0, \dots, a_3 = 0, \\
 b_1 &= -\frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} R^2, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = a_1 \cdot R^2.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Как и ранее, дополнительно к (19) выполняются равенства $a_{k,k=4,\infty} = 0$, и $b_{k,k=4,\infty} = 0$. Подставляя (19) в (14), получаем:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot z + \frac{R^2}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{2i\alpha} \frac{1}{z}, \quad (20)$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{-2i\alpha} \cdot z - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} R^2 \frac{1}{z} + \frac{R^4}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e^{2i\alpha} \frac{1}{z^3}.$$

И в этом случае возможна визуализация распределения напряжений непосредственно с помощью (1), (2) и (20), в которых опущены промежуточные выделения вещественных и мнимых частей (Рисунок 2).

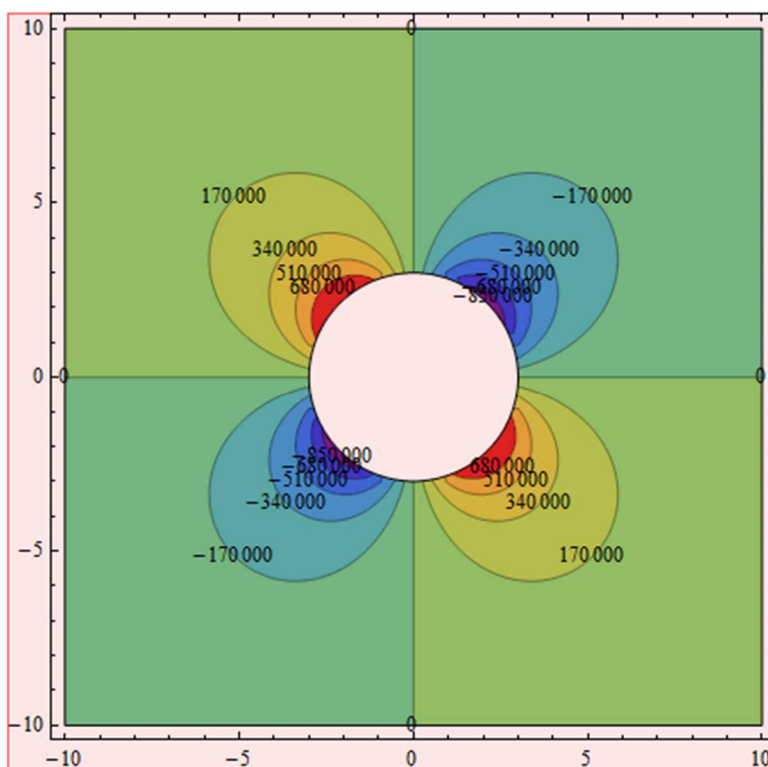


Рисунок 2. Распределение напряжений σ_{12} при растяжении плоскости приложенными на бесконечности равномерно распределенными напряжениями $\sigma_1 = 10^6 \text{ Па}$ и $\sigma_2 = 10^6 \text{ Па}$ при $\alpha = \pi/4$

Визуализация решения задачи Гадолина [4] (или задачи Ляме).

Рассмотрим отверстие радиуса R в упругой изотропной плоскости с приложенным равномерным постоянным нормальным напряжением величиной $\sigma_{rr}|_{r=R} \neq 0$, приложенного к границе отверстия.

Соблюдая принятые в механике обозначения, давление, приложенное внутри отверстия, обозначим через p , где $p = -\sigma_{rr}|_{r=R}$. Будем предполагать, что касательные напряжения отсутствуют на контуре отверстия, т.е. $\sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0$.

Отметим, что в данном случае главный вектор сил, приложенных к границе отверстия L , равен нулю. Для обоснования этого вычислим его (с учетом того, что положительное направление нормали для отверстия – это направление внутрь его):

$$\begin{aligned} V_1 + iV_2 &= -\oint_L (\sigma_{rr}|_{r=R} + i \cdot \sigma_{r\theta}|_{r=R}) d\tau = \\ &= -R \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}|_{r=R} + i \cdot \sigma_{r\theta}|_{r=R}) (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) d\theta. \end{aligned} \quad (21)$$

Разделяя вещественную и мнимую части в (21), получаем:

$$\begin{aligned} V_1 &= -R \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}|_{r=R} \cos(\theta) - \sigma_{r\theta}|_{r=R} \cdot \sin(\theta)) d\theta, \\ V_2 &= -R \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}|_{r=R} \cdot \sin(\theta) + \sigma_{r\theta}|_{r=R} \cdot \cos(\theta)) d\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Вычисляя (22), исходя из краевых условий, получаем:

$$V_1 = p \cdot R \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta = 0, \quad \dots V_2 = p \cdot R \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0. \quad (23)$$

Кроме (23) будем предполагать, что напряжения и вращение исчезают на бесконечности. Исходя из постановки задачи и вида комплексных аналитических функций (4), получаем:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad \psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}. \quad (24)$$

В качестве краевого условия на границе отверстия необходимо удовлетворить условиям $\sigma_{rr}|_{r=R} = -p$, $\sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0$. Подставляем в (24) уравнение границы отверстия радиуса R , т.е. $z = R \cdot e^{i\theta}$. Далее подставляем (24) в (15) и, исходя из краевого условия, получаем уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{a_k}{(R \cdot e^{i\theta})^{k+1}} + \frac{\overline{a_k}}{(R \cdot e^{i\theta})^{k+1}} + (k+1) \frac{a_k}{(R \cdot e^{i\theta})^{k+1}} \right) - \frac{1}{(R \cdot e^{i\theta})} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_k}{(R \cdot e^{i\theta})^k} = p. \quad (25)$$

Ограничимся несколькими слагаемыми в (24), т.е. положим $k = 1, 2$ и сгруппировав, получаем:

$$\left(\frac{a_1}{(R \cdot e^{i\theta})^2} + \frac{\overline{a_1}}{(R \cdot e^{i\theta})^2} + 2 \frac{a_1}{(R \cdot e^{i\theta})^2} \right) + 2 \left(\frac{a_2}{(R \cdot e^{i\theta})^3} + \frac{\overline{a_2}}{(R \cdot e^{i\theta})^3} + 3 \frac{a_2}{(R \cdot e^{i\theta})^3} \right) - \left(\frac{b_1}{R^2} + 2 \frac{b_2}{R^3 \cdot e^{i\theta}} \right) = p. \quad (26)$$

Для того, чтобы (26) было тождественно выполнено, необходимо, чтобы была справедлива следующая система уравнений:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = -p \cdot R^2, \quad b_2 = 0. \quad (27)$$

Дополнительно к (27) выполняются равенства $a_{k,k=3,\infty} = 0$, и $b_{k,k=3,\infty} = 0$. Подставляя (27) в (24), получаем:

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = -\frac{\rho \cdot R^2}{z}. \quad (28)$$

С использованием (3), (7) и (28) получаем распределение вертикальных перемещений (Рисунок 3) и нормальных радиальных напряжений в плоскости с отверстием с приложенным к его краю давлением (Рисунок 4).

Визуализация решения задачи о равномерном распределении касательных напряжений на краю отверстия в плоскости. Как и ранее будем рассматривать отверстие радиуса R в упругой изотропной плоскости с приложенным равномерным постоянным касательным напряжением величиной $\sigma_{r\theta}|_{r=R} = T$, приложенного к границе отверстия (напряжение $\sigma_{rr}|_{r=R} = 0$).

Отметим, что в данном случае также, как и в предыдущем примере, главный вектор сил, приложенных к границе отверстия L , равен нулю, что не сложно установить из уравнения (21), а также предполагается, что напряжения и вращение исчезает на бесконечности. Исходя из (7), (25) и (26), положив, что $k = 1,2$, и сгруппировав, получаем для границы отверстия радиуса R , т.е. $z = R \cdot e^{i\theta}$:

$$\left(\frac{a_1}{(R \cdot e^{i\theta})^2} + \frac{\bar{a}_1}{(R \cdot e^{i\theta})^2} + 2 \frac{a_1}{(R \cdot e^{i\theta})^2} \right) + \quad (29)$$

$$2 \left(\frac{a_2}{(R \cdot e^{i\theta})^3} + \frac{\bar{a}_2}{(R \cdot e^{i\theta})^3} + 3 \frac{a_2}{(R \cdot e^{i\theta})^3} \right) - \left(\frac{b_1}{R^2} + 2 \frac{b_2}{R^3 \cdot e^{i\theta}} \right) = -iT.$$

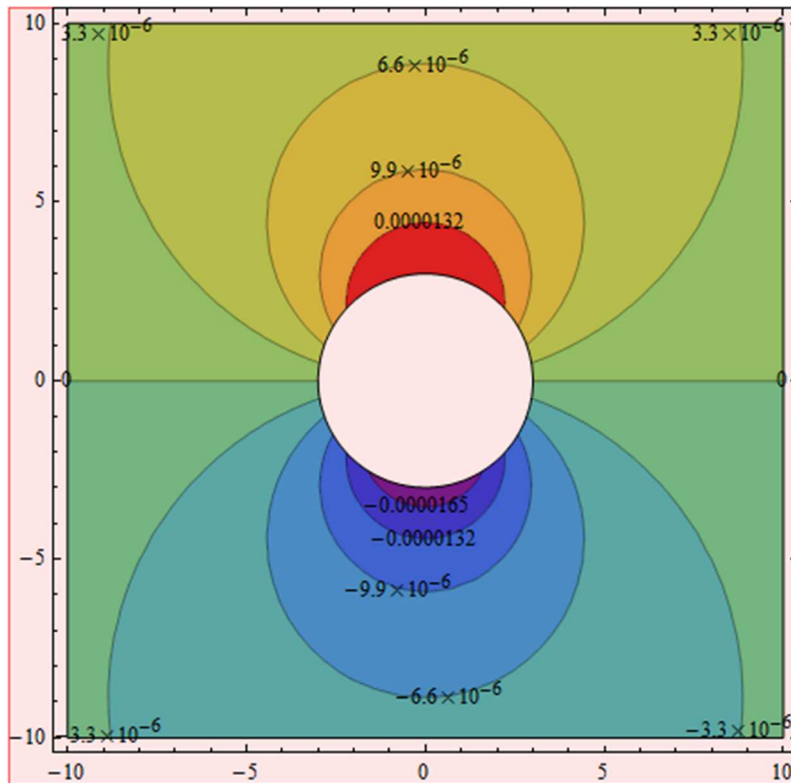


Рисунок 3. Вертикальные перемещения u_2 в плоскости с отверстием при плоском напряженном состоянии и равномерном давлении $p = 10^6 \text{ Па}$ на границе отверстия ($E = 10^6 \text{ Па}$, $\nu = 0.3$)

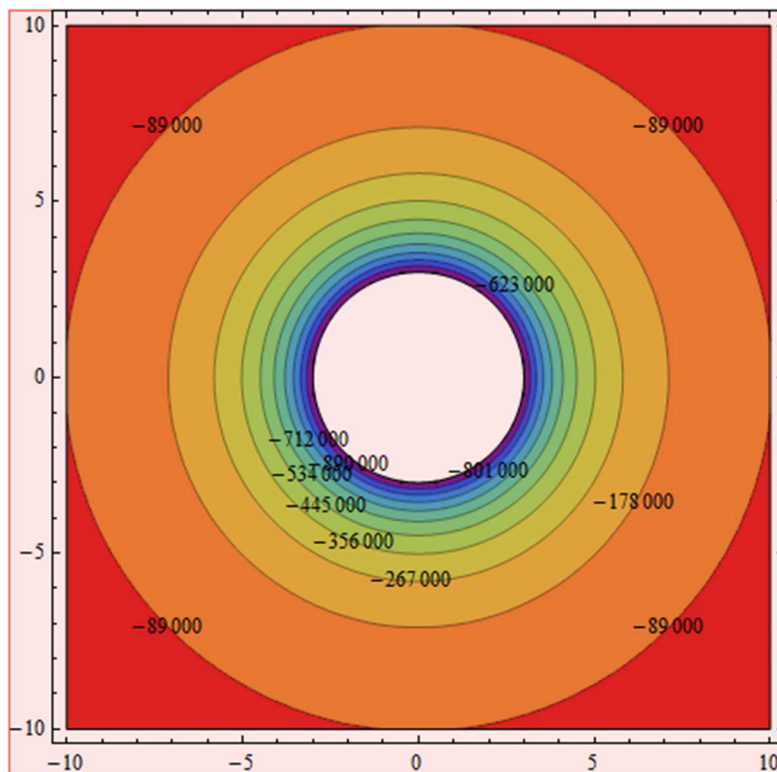


Рисунок 4. Распределение напряжений σ_{rr} при равномерном давлении $p = 10^6 \text{ Па}$ на границе отверстия

Для того, чтобы (29) было тождественно выполнено, необходимо, чтобы была справедлива следующая система уравнений:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = T \cdot R^2 \cdot i, \quad b_2 = 0. \quad (30)$$

Дополнительно к (17) выполняются равенства $a_{k, k=3, \infty} = 0$, и $b_{k, k=3, \infty} = 0$. Подставляя (27) в (24), получаем:

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = \frac{T \cdot R^2 \cdot i}{z}. \quad (31)$$

С использованием (7) и (31), получаем распределение касательных напряжений в плоскости с отверстием с приложенным к его краю постоянным касательным напряжением. Отметим, что картина распределения касательных напряжений совпадает с распределением нормальных (Рисунок 5). Отметим, что нормальные напряжения при этом равны нулю, что соответствует в прикладной механике случаю чистого кручения.

Используем уравнение для определения главного момента [2]:

$$\begin{aligned} M &= \oint_L (\sigma_{r\theta}|_{r=R} \cdot x - \sigma_{rr}|_{r=R} \cdot y) d\tau = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (\sigma_{r\theta}|_{r=R} \cdot \cos(\theta) - \sigma_{rr}|_{r=R} \cdot \sin(\theta)) \cdot \cos(\theta) d\theta = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta}|_{r=R} \cdot \cos(\theta)^2 d\theta = T \cdot R^2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 d\theta = T \cdot \pi \cdot R^2 \end{aligned} \quad (32)$$

Исходя из (31) и (32), можно получить выражение для комплексных аналитических функций через значение интегрального момента M , приложенного к границе отверстия:

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = \frac{M}{\pi} i \frac{1}{z}. \quad (33)$$

Выражение (33) не зависит от радиуса отверстия и, соответственно, остается верным при его стремлении к нулю. Таким образом, (33) является решением задачи о сосредоточенном моменте, приложенном в начале координат [2].

Пример специфического распределения напряжений, приложенных к контуру отверстия. Сосредоточенная сила в упругой плоскости.

Будем рассматривать отверстие радиуса R в упругой изотропной плоскости с приложенным к контуру отверстия L нормальным напряжением $\sigma_{rr}|_{r=R} = F_1 \cdot \cos(\theta) + F_2 \cdot \sin(\theta)$, где F_1 и F_2 - произвольные вещественные константы). Кроме того, будем предполагать, что отсутствует приложенное к границе отверстия касательное напряжение $\sigma_{r\theta}|_{r=R}$. Также предполагаем, что напряжения и вращение исчезает на бесконечности.

Исходя из (4), можно записать общий вид комплексных аналитических функций:

$$\varphi(z) = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad (34)$$

$$\psi(z) = \kappa \frac{V_1 - iV_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}.$$

Исходя из краевых условий, можно получить:

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta})|_L &= F_1 \cdot \cos(\theta) + F_2 \cdot \sin(\theta) = \\ &= F_1 \cdot (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - i \cdot F_2 \cdot (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \end{aligned} \quad (35)$$

Далее, из (34), (35) и (7), можно установить, что $a_{k,k=1,\dots,\infty} = 0$, а в комплексной аналитической функции $\psi(z)$ (34) достаточно использовать только два слагаемых отличных от нуля (b_1 и b_2), а остальные положить

равными нулю ($b_{k,k=3,\dots,\infty} = 0$). Тогда получаем для границы отверстия радиуса R , т.е. $z = R \cdot e^{i\theta}$, что выполнено равенство:

$$(\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta})|_L = -\frac{V_1 - iV_2}{2\pi} \frac{1}{R} e^{i\theta} + \left(-\frac{V_1 + iV_2}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{R} + 2\frac{b_2}{R^3} \right) \cdot e^{-i\theta} + \frac{b_1}{R^2}. \quad (36)$$

Учитывая, что с другой стороны краевые условия имеют вид:

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta})|_L &= F_1 \cdot \cos(\theta) + F_2 \cdot \sin(\theta) = \\ &= \frac{F_1}{2} \cdot (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - i \cdot \frac{F_2}{2} \cdot (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \\ &= \frac{(F_1 - i \cdot F_2)}{2} \cdot e^{i\theta} + \frac{(F_1 + i \cdot F_2)}{2} \cdot e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (37)$$

Сравнивая (36) и (37), получаем:

$$F_1 - i \cdot F_2 = -\frac{V_1 - iV_2}{\pi} \frac{1}{R}, \quad \frac{(F_1 + i \cdot F_2)}{2} = \left(-\frac{V_1 + iV_2}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{R} + 2\frac{b_2}{R^3} \right), \quad b_1 = 0. \quad (38)$$

Из (38) очевидно, что $F_1 = \frac{-V_1}{\pi \cdot R}$, $F_2 = \frac{-V_2}{\pi \cdot R}$, тогда

$$b_2 = \frac{V_1 + i \cdot V_2}{4\pi} \frac{(1-\kappa)}{(1+\kappa)} \cdot R^2. \text{ Используя (22), проверим правильность опре-}$$

деления констант F_1 и F_2 .

Используя (22), определим константы F_1 и F_2 , исходя из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} V_1 &= -R \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}|_{r=R} \cos(\theta) d\theta = -R \int_0^{2\pi} (F_1 \cos(\theta) + F_2 \sin(\theta)) \cos(\theta) d\theta = \\ &= -R \int_0^{2\pi} F_1 \cdot \cos(\theta)^2 d\theta = -R \cdot \pi \cdot F_1, \\ V_2 &= -R \int_0^{2\pi} F_2 \cdot \sin(\theta)^2 d\theta = -R \cdot \pi \cdot F_2 \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, комплексные аналитические функции, решающие поставленную краевую задачу, имеют вид:

$$\varphi(z) = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z), \quad \psi(z) = \kappa \frac{V_1 - iV_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z) + \frac{b_2}{z^2}. \quad (40)$$

Переходя к пределу в (40), при $R \rightarrow 0$ получаем, что $b_2 \rightarrow 0$ и напряжения на контуре отверстия $(\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta})_L$ (36) неограниченно возрастают, однако главный вектор сил, приложенных к отверстию, остается ограниченным. Таким образом, выражения:

$$\varphi(z) = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z), \quad \psi(z) = \kappa \frac{V_1 - iV_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z)$$

можно трактовать, как решения задачи для сосредоточенной силы, приложенной в начале координат [2] (Рисунок 5). Необходимо отметить, что распределения напряжений для последнего примера приложения нагрузки, а также случая сосредоточенной силы, зависят от вида напряженного состояния плоскости (параметр κ), что не характерно для решений первых основных задач в двумерном случае.

Выводы.

С помощью теории аналитических функций и формул Колосова–Мусхелишвили решен ряд стандартных задач двумерной теории упругости для плоскости с отверстием.

Установлено, что применение системы Mathematica для визуализации решений поставленных задач значительно облегчается тем, что нет необходимости аналитически отделять вещественные и мнимые части получаемых выражений в формулах Колосова-Мусхелишвили, а само общее решение строиться в виде рядов с комплексными членами.

Установлено, что распределения напряжений для последнего примера приложения нагрузки, а также случая сосредоточенной силы зависят от вида напряженного состояния плоскости (параметр κ), что не характерно для решений первых основных краевых задач в двумерном случае.

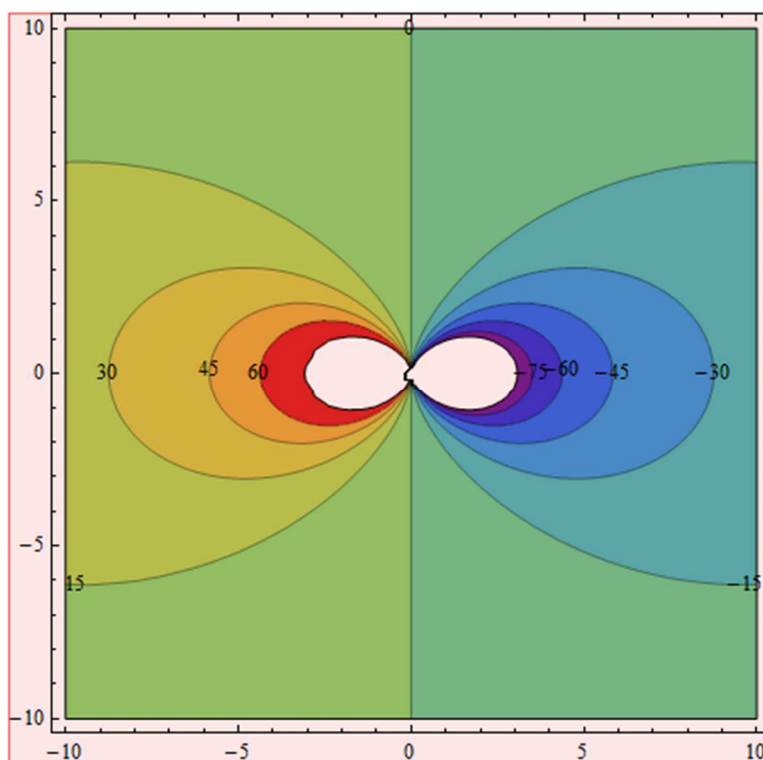


Рисунок 5. Распределение напряжений σ_{11} при заданной величине проекций главного вектора сил $V_1 = 1000H$ и $V_2 = 0$, коэффициенте Пуассона $\nu = 0.3$ и плоском напряженном состоянии (не закрашенные области указывают на резкое возрастание значений напряжений и не обрабатываются системой Mathematica)

Список использованных источников

1. Kravchuk A.S. Mathematical Modelling of Spatial Contact Interaction of a System of Finite Cylindrical Bodies // Technische Mechanik. Band 18. Heft 4. 1998. P. 271-276.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. М.: Госстройиздат, 1957. 256 с.