

УДК 539.3

**СУЖЕНИЕ «ВИЛКИ» ФОЙГТА-РЕЙССА В ТЕОРИИ
УПРУГИХ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ В СРЕДНЕМ
ИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ТЕЛ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ
ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ**

Тарасюк Иван Александрович
студент

Кравчук Александр Степанович
д-р физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)
author@apriori-journal.ru

Аннотация. В теории композиционных тел сложился определенный стереотип – для сужения «вилки» Фойгта-Рейсса необходимо использовать вариационный принцип и получить более узкую и, соответственно, точную «вилку» Хашина-Штрикмана. Данная последовательность действий в той или иной форме воспроизводится в большинстве научных работ посвященных механике композиционных материалов. При этом следует подчеркнуть, что экспериментального подтверждения верности получаемого сужения («вилки» Хашина-Штрикмана) до настоящего времени выполнено не было. В данной работе предлагается другой теоретический подход к сужению «вилки» модулей упругости композиционного материала без использования вариационных принципов. Он основан на вычислении эффективных матриц жесткости и податливости, определяющих связи усредненных по правилу смеси напряжений и усредненных по правилу смеси деформаций, вычисленных по гипотезам Фойгта и Рейсса в элементарном объеме композиционного материала. На последнем шаге вычисляется математическое ожидание коэффициентов полученных матриц, определяющих суженую «вилку». В отличие от устоявшегося в научной литературе мнения установлено, что только модули упругости, стоящие на диагоналях матриц податливости, полученных по Фойгту и Рейссу, всегда являются верхней и нижней границей реальных модулей упругости композитов. Остальные коэффициенты матриц могут (в смысле верхней и нижней оценки) меняться местами, что зависит от конкретной реализации упругих характеристик компонент композиционного материала.

Ключевые слова: композиционный изотропный материал; гипотеза Фойгта; гипотеза Рейсса; сужение «вилки» модулей упругости композиционного материала.

CALCULATION OF VOIGT-REUSS «RANGE» IN THE THEORY OF ELASTICITY OF STRUCTURAL HETEROGENEOUS, AVERAGE ISOTROPIC, COMPOSITE BODIES WITHOUT APPLICATION OF VARIATIONAL PRINCIPLES

Tarasyuk Ivan Alexandrovich

student

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences

Belarus State University, Minsk (Belarus)

Abstract. In the theory of composite bodies formed stereotypical – it is necessary to use a variational principle to narrow the «range» of Voigt-Reuss and obtain, respectively, a more precise «range» of Hashin-Shtrikman. This sequence of operations appears in one form or another in most scientific papers dealing with the mechanics of composite materials. It should be emphasized that the experimental confirmation of validity of resulting narrowing («range» of Hashin-Shtrikman) hasn't been met so far. In this paper we propose a different approach to narrowing «range» of the elastic modules of the composite material without the use of variational principles. It is based on the calculation of effective flexibility and stiffness matrices defining the relations between averaged by mixture rule stress and averaged mixture rule deformations. It is calculated by Voigt and Reuss hypotheses in a volume element of the composite material. The last step is to calculate the expectation coefficients of obtained matrices which are determined restriction «range». In contrast to the well-established in the scientific literature opinion it is found that only the elastic modules which stand on the diagonal flexibility matrices obtained by Voigt and Reuss can be upper and lower limits of the real elastic moduli of composites. The remaining coefficients of the matrices may change places (in the sense of the upper and lower bound), that depends on the particular implementation of the elastic characteristics of component of the composite material.

Key words: composite isotropic material; Voigt hypothesis; Reuss hypothesis; narrowing «range» of the elastic moduli of the composite material.

Введение. В последние годы существенное развитие получили исследования физико-механических свойств материалов, температурных полей и напряженно-деформированного состояния в элементах конструкций с учетом их структуры. Результаты этих исследований находят практическое применение при расчете на прочность элементов конструкций из неоднородных материалов [1].

Одной из основных задач механики композитов является задача проектирования материалов с заранее заданными жесткостными и прочностными характеристиками. Если композиционный материал моделируется однородной изотропной линейно упругой средой, то задача проектирования материала с заранее заданными свойствами приводится к задаче теоретического определения модулей упругости композиционного материала (так называемых эффективных модулей) по известным модулям упругости компонентов [2].

Постановка задачи. Для решения задачи определения эффективных модулей рассматривается элемент композиционного материала, на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в испытательных машинах при проведении серии опытов (чистое растяжение, кручение, всестороннее сжатие), для определения полного набора модулей однородного изотропного материала [2]. Макроточкой называется элементарный макрообъем, размеры которого значительно превосходят характерные размеры неоднородностей, однако существенно меньше размеров тела [2].

Таким образом, для решения задачи определения эффективных деформационных характеристик элемента композиционного материала в качестве макроточки примем прямоугольный параллелепипед объемом $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$. Размеры параллелепипеда значительно превосходят характерные размеры неоднородностей, но пренебрежимо малы в сравнении с характерными размерами твердого тела.

Будем считать, что параллелепипед состоит из n изотропных компонент, и предполагается, что значения концентраций γ_k компонент композиционного материала известны для всего материала, и они же являются объемными долями компонент для любой макроточки твердого тела. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние отдельно взятого элементарного параллелепипеда с координатами (x, y, z) , имитирующего напряженно-деформированное состояние твердого тела из композиционного материала в данной точке.

Применение гипотезы Фойгта для изотропного в среднем композиционного материала [3]. Используем гипотезу Фойгта о том, что при простейшем нагружении в макроточке тела из композиционного материала имеет место однородная деформация, т.е. для любой компоненты параллелепипеда верны соотношения: $\varepsilon_{x,i} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{y,i} = \varepsilon_y$, $\varepsilon_{z,i} = \varepsilon_z$, $\varepsilon_{xy,i} = \varepsilon_{xy}$, $\varepsilon_{yz,i} = \varepsilon_{yz}$, $\varepsilon_{zx,i} = \varepsilon_{zx}$. Запишем закон Гука для i -ой компоненты элементарного параллелепипеда:

$$\sigma_{x,i} = \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} (\varepsilon_x(1-\nu_i) + \nu_i(\varepsilon_y + \varepsilon_z)), \quad (1)$$

$$\sigma_{y,i} = \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} (\varepsilon_y(1-\nu_i) + \nu_i(\varepsilon_x + \varepsilon_z)), \quad (2)$$

$$\sigma_{z,i} = \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} (\varepsilon_z(1-\nu_i) + \nu_i(\varepsilon_x + \varepsilon_y)), \quad (3)$$

$$\sigma_{xy,i} = \frac{E_i}{1+\nu_i} \varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz,i} = \frac{E_i}{1+\nu_i} \varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{zx,i} = \frac{E_i}{1+\nu_i} \varepsilon_{zx}. \quad (4)$$

Для нахождения эффективных характеристик по Фойгту определим средние значения напряжений $\langle \sigma_x \rangle_F$, $\langle \sigma_y \rangle_F$, $\langle \sigma_z \rangle_F$, $\langle \sigma_{xy} \rangle_F$, $\langle \sigma_{yz} \rangle_F$, $\langle \sigma_{zx} \rangle_F$, действующих на все компоненты композиционного материала, с помощью статистического усреднения дискретных случайных величин $\sigma_{x,i}$, $\sigma_{y,i}$, $\sigma_{z,i}$, $\sigma_{xy,i}$, $\sigma_{yz,i}$, $\sigma_{zx,i}$ (1)-(4):

$$\langle \sigma_x \rangle_F = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \sigma_{x,i} = \frac{\langle E \rangle_F}{(1 + \langle \nu \rangle_F)(1 - 2\langle \nu \rangle_F)} (\varepsilon_x (1 - \langle \nu \rangle_F) + \langle \nu \rangle_F (\varepsilon_y + \varepsilon_z)), \quad (5)$$

$$\langle \sigma_y \rangle_F = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \sigma_{y,i} = \frac{\langle E \rangle_F}{(1 + \langle \nu \rangle_F)(1 - 2\langle \nu \rangle_F)} (\varepsilon_y (1 - \langle \nu \rangle_F) + \langle \nu \rangle_F (\varepsilon_x + \varepsilon_z)), \quad (6)$$

$$\langle \sigma_z \rangle_F = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \sigma_{z,i} = \frac{\langle E \rangle_F}{(1 + \langle \nu \rangle_F)(1 - 2\langle \nu \rangle_F)} (\varepsilon_z (1 - \langle \nu \rangle_F) + \langle \nu \rangle_F (\varepsilon_x + \varepsilon_y)), \quad (7)$$

$$\langle \sigma_{xy} \rangle_F = \langle G \rangle_F \cdot \varepsilon_{xy}, \quad \langle \sigma_{yz} \rangle_F = \langle G \rangle_F \cdot \varepsilon_{yz}, \quad \langle \sigma_{zx} \rangle_F = \langle G \rangle_F \cdot \varepsilon_{zx}, \quad (8)$$

где усредненные значения $\langle E \rangle_F$ и $\langle \nu \rangle_F$ в (5)-(8) определяются выражениями:

$$\langle E \rangle_F = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \cdot E_i}{1 + \nu_i} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \cdot E_i}{1 - 2\nu_i} \right) / \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \cdot E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \right), \quad (9)$$

$$\langle \nu \rangle_F = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \cdot E_i \cdot \nu_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \right) / \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \cdot E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \right), \quad (10)$$

$$\langle G \rangle_F = \frac{\langle E \rangle_F}{1 + \langle \nu \rangle_F}. \quad (11)$$

Применение гипотезы Рейсса для изотропного в среднем композиционного материала [4]. Используем гипотезу Рейсса о том, что при простейшем нагружении в композите имеет место однородное напряженное состояние, т.е. для любой компоненты параллелепипеда верны соотношения: $\sigma_{x,i} = \sigma_x$, $\sigma_{y,i} = \sigma_y$, $\sigma_{z,i} = \sigma_z$, $\sigma_{xy,i} = \sigma_{xy}$, $\sigma_{yz,i} = \sigma_{yz}$, $\sigma_{zx,i} = \sigma_{zx}$. Запишем закон Гука для i -ой компоненты элементарного параллелепипеда:

$$\varepsilon_{x,i} = \frac{1}{E_i} (\sigma_x - \nu_i (\sigma_y + \sigma_z)), \quad (12)$$

$$\varepsilon_{y,i} = \frac{1}{E_i} (\sigma_y - \nu_i (\sigma_x + \sigma_z)), \quad (13)$$

$$\varepsilon_{z,i} = \frac{1}{E_i} (\sigma_z - \nu_i (\sigma_x + \sigma_y)), \quad (14)$$

$$\varepsilon_{xy,i} = \frac{1+\nu_i}{E_i} \sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz,i} = \frac{1+\nu_i}{E_i} \sigma_{yz}, \quad \varepsilon_{zx,i} = \frac{1+\nu_i}{E_i} \sigma_{zx}. \quad (15)$$

Для нахождения эффективных характеристик по Рейссу определим средние значения деформаций $\langle \varepsilon_x \rangle_R$, $\langle \varepsilon_y \rangle_R$, $\langle \varepsilon_z \rangle_R$, $\langle \varepsilon_{xy} \rangle_R$, $\langle \varepsilon_{yz} \rangle_R$, $\langle \varepsilon_{zx} \rangle_R$ по всем компонентам композиционного материала в элементарном параллелепипеде с помощью статистического усреднения дискретных случайных величин $\varepsilon_{x,i}$, $\varepsilon_{y,i}$, $\varepsilon_{z,i}$, $\varepsilon_{xy,i}$, $\varepsilon_{yz,i}$, $\varepsilon_{zx,i}$ (12)-(15):

$$\langle \varepsilon_x \rangle_R = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \varepsilon_{x,i} = \frac{1}{\langle E \rangle_R} (\sigma_x - \langle \nu \rangle_R \cdot (\sigma_y + \sigma_z)), \quad (16)$$

$$\langle \varepsilon_y \rangle_R = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \varepsilon_{y,i} = \frac{1}{\langle E \rangle_R} (\sigma_y - \langle \nu \rangle_R \cdot (\sigma_x + \sigma_z)), \quad (17)$$

$$\langle \varepsilon_z \rangle_R = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \varepsilon_{z,i} = \frac{1}{\langle E \rangle_R} (\sigma_z - \langle \nu \rangle_R \cdot (\sigma_x + \sigma_y)), \quad (18)$$

$$\langle \varepsilon_{xy} \rangle_R = \frac{\sigma_{xy}}{\langle G \rangle_R}, \quad \langle \varepsilon_{yz} \rangle_R = \frac{\sigma_{yz}}{\langle G \rangle_R}, \quad \langle \varepsilon_{zx} \rangle_R = \frac{\sigma_{zx}}{\langle G \rangle_R}, \quad (19)$$

где усредненные значения $\langle E \rangle_R$ и $\langle \nu \rangle_R$ в (16)-(19) определяются выражениями:

$$\langle E \rangle_R = 1 / \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{E_i} \right), \quad (20)$$

$$\langle V \rangle_R = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i V_i}{E_i} \right) / \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{E_i} \right), \quad (21)$$

$$\langle G \rangle_R = \frac{\langle E \rangle_R}{1 + \langle V \rangle_R}. \quad (22)$$

Основное неравенство, связывающее усредненные модули упругости по Фойгту и по Рейссу. Покажем, что для эффективных модулей Юнга $\langle E \rangle_F$ и $\langle E \rangle_R$ выполняется неравенство:

$$\langle E \rangle_F \geq \langle E \rangle_R. \quad (23)$$

Отметим, что выполняется следующее соотношение:

$$\langle E \rangle_F - \sum_{i=1}^n \gamma_i E_i = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{1+v_i} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{1-2v_i} - \sum_{i=1}^n \gamma_i E_i \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{(1+v_i)(1-2v_i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{(1+v_i)(1-2v_i)}} \geq 0. \quad (24)$$

Ввиду того, что знаменатель в выражении (24) строго положительный, достаточно показать, что числитель является неотрицательным. Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{1+v_i} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{1-2v_i} - \sum_{i=1}^n \gamma_i E_i \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{(1+v_i)(1-2v_i)} = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \gamma_i \gamma_j E_i E_j \left(\frac{2 - (v_i + v_j) - 4v_i v_j}{(1+v_i)(1-2v_i)(1+v_j)(1-2v_j)} - \frac{2 - (v_i + v_j) - 2(v_i^2 + v_j^2)}{(1+v_i)(1-2v_i)(1+v_j)(1-2v_j)} \right) = \quad (25) \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 2\gamma_i \gamma_j E_i E_j \left(\frac{(v_i - v_j)^2}{(1+v_i)(1-2v_i)(1+v_j)(1-2v_j)} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Из (25) следует, что (24) выполнено.

Докажем, что выполняется еще одно неравенство:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i E_i - \langle E \rangle_R = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i E_i \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{E_i} - 1 \right) / \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{E_i} \right) \geq 0. \quad (26)$$

Ввиду того, что знаменатель в неравенстве (26) строго положительный, достаточно показать, что числитель является неотрицательным. Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \gamma_i E_i \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{E_i} - 1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i \gamma_j \frac{E_i}{E_j} - 1 = \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \gamma_i \gamma_j \left(\frac{E_i}{E_j} + \frac{E_j}{E_i} \right) - 1 \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 2\gamma_i \gamma_j - 1 = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \right)^2 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) следует, что (26) также выполнено. Используя (24) и (26), можно составить следующую цепь неравенств:

$$\langle E \rangle_F \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i E_i \geq \langle E \rangle_R. \quad (28)$$

Очевидно, что (28) доказывает неравенство (23). Аналогично можно показать, что $\langle G \rangle_R$ не превосходит $\langle G \rangle_F$. Покажем, что для эффективных коэффициентов Пуассона $\langle \nu \rangle_F$ и $\langle \nu \rangle_R$ нет связывающего их неравенства. Для этого приведем примеры, демонстрирующие, что $\langle \nu \rangle_F$ может быть и больше, и меньше $\langle \nu \rangle_R$. Рассмотрим разность:

$$\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R. \quad (29)$$

Не нарушая общности, будем считать, что $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n$. Тогда для того, чтобы выражение (29) было положительным, достаточно при $i = \overline{1, n-1}$ выполнения условия:

$$E_i \geq \sqrt{\frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{(1+\nu_{i+1})(1-2\nu_{i+1})}} E_{i+1},$$

и, наоборот, для того, чтобы выражение (29) было неположительным, достаточно при $i = \overline{1, n-1}$ выполнения условия:

$$E_i \leq \sqrt{\frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{(1+\nu_{i+1})(1-2\nu_{i+1})}} E_{i+1}.$$

Можно показать, что для отношений $\frac{\langle \nu \rangle_F}{\langle E \rangle_F}$ и $\frac{\langle \nu \rangle_R}{\langle E \rangle_R}$ также нет связывающего их неравенства.

Таким образом, установлено, что только модули упругости (9), (20) и (11), (22), стоящие на диагоналях матриц податливости, полученных по Фойгту и Рейссу, могут являться верхней и нижней границей реальных модулей упругости композитов. Остальные коэффициенты матриц могут (в смысле верхней и нижней оценки) меняться местами, что зависит от конкретной реализации упругих характеристик компонент композиционного материала.

Вычисление «вилки» эффективных характеристик. Перейдем к определению «вилки» эффективных характеристик. Для этого запишем элементы матрицы жесткости $J(\alpha)$, используя усреднение с неопределенным коэффициентом α , где $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_x \rangle_\alpha &= \alpha \langle \varepsilon_x \rangle_F + (1-\alpha) \langle \varepsilon_x \rangle_R = \\
&= \frac{\alpha}{\langle E \rangle_F} (\sigma_x - \langle \nu \rangle_F (\sigma_y + \sigma_z)) + \frac{1-\alpha}{\langle E \rangle_R} (\sigma_x - \langle \nu \rangle_R (\sigma_y + \sigma_z)) = \\
&= \frac{1}{\langle E(\alpha) \rangle^\sigma} (\sigma_x - \langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma (\sigma_y + \sigma_z)),
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_y \rangle_\alpha &= \alpha \langle \varepsilon_y \rangle_F + (1-\alpha) \langle \varepsilon_y \rangle_R = \\
&= \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_F + \alpha \langle E \rangle_R}{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R} \left(\sigma_y - \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_R + \alpha \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_F}{(1-\alpha) \langle E \rangle_F + \alpha \langle E \rangle_R} (\sigma_x + \sigma_z) \right) = \\
&= \frac{1}{\langle E(\alpha) \rangle^\sigma} (\sigma_y - \langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma (\sigma_x + \sigma_z)),
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_z \rangle_\alpha &= \alpha \langle \varepsilon_z \rangle_F + (1-\alpha) \langle \varepsilon_z \rangle_R = \\
&= \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_F + \alpha \langle E \rangle_R}{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R} \left(\sigma_z - \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_R + \alpha \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_F}{(1-\alpha) \langle E \rangle_F + \alpha \langle E \rangle_R} (\sigma_x + \sigma_y) \right) = \\
&= \frac{1}{\langle E(\alpha) \rangle^\sigma} (\sigma_z - \langle \nu \rangle^\sigma (\sigma_x + \sigma_y)),
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\langle \varepsilon_{xy} \rangle_\alpha = \alpha \langle \varepsilon_{xy} \rangle_F + (1-\alpha) \langle \varepsilon_{xy} \rangle_R = \frac{1 + \langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma}{\langle E(\alpha) \rangle^\sigma} \sigma_{xy}, \tag{33}$$

$$\langle \varepsilon_{yz} \rangle_\alpha = \alpha \langle \varepsilon_{yz} \rangle_F + (1-\alpha) \langle \varepsilon_{yz} \rangle_R = \frac{1 + \langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma}{\langle E(\alpha) \rangle^\sigma} \sigma_{yz}, \tag{34}$$

$$\langle \varepsilon_{zx} \rangle_\alpha = \alpha \langle \varepsilon_{zx} \rangle_F + (1-\alpha) \langle \varepsilon_{zx} \rangle_R = \frac{1 + \langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma}{\langle E(\alpha) \rangle^\sigma} \sigma_{zx}, \tag{35}$$

где усредненные значения $\langle E(\alpha) \rangle^\sigma$ и $\langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma$ в (30)-(35) определяются выражениями:

$$\langle E(\alpha) \rangle^\sigma = \frac{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R}{(1-\alpha) \langle E \rangle_F + \alpha \langle E \rangle_R}, \tag{36}$$

$$\langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma = \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_R + \alpha \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_F}{(1-\alpha) \langle E \rangle_F + \alpha \langle E \rangle_R}. \tag{37}$$

Следует отметить, что для композиционного материала, изотропно-го в среднем, с эффективными характеристиками (36) и (37) выполняется соотношение, связывающее модуль сдвига с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона:

$$\langle G(\alpha) \rangle^\sigma = \frac{\langle E(\alpha) \rangle^\sigma}{1 + \langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma}. \quad (38)$$

Запишем элементы матрицы податливости $E(\alpha)$, используя усреднение с неопределенным коэффициентом α , где $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle_\alpha &= \alpha \langle \sigma_x \rangle_F + (1-\alpha) \langle \sigma_x \rangle_R = \\ &= \frac{\alpha \langle E \rangle_F}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)} (\varepsilon_x(1-\langle \nu \rangle_F) + \langle \nu \rangle_F (\varepsilon_y + \varepsilon_z)) + \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_R}{(1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R)} \times \\ &\times (\varepsilon_x(1-\langle \nu \rangle_R) + \langle \nu \rangle_R (\varepsilon_y + \varepsilon_z)) = \\ &= \frac{\langle E(\alpha) \rangle^\varepsilon}{(1+\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon)(1-2\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon)} (\varepsilon_x(1-\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon) + \langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon (\varepsilon_y + \varepsilon_z)), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_y \rangle_\alpha &= \alpha \langle \sigma_y \rangle_F + (1-\alpha) \langle \sigma_y \rangle_R = \left(\frac{\alpha \langle E \rangle_F}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)} + \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_R}{(1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R)} \right) (\varepsilon_y + (\varepsilon_x - \varepsilon_y + \varepsilon_z)) \times \\ &\times \left(\frac{\alpha \langle E \rangle_F}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)} + \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_R}{(1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R)} \right)^{-1} \left(\frac{\alpha \langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_F}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)} + \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_R}{(1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R)} \right) = (40) \\ &= \frac{\langle E(\alpha) \rangle^\varepsilon}{(1+\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon)(1-2\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon)} (\varepsilon_y(1-\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon) + \langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon (\varepsilon_x + \varepsilon_z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle_\alpha &= \alpha \langle \sigma_z \rangle_F + (1-\alpha) \langle \sigma_z \rangle_R = \left(\frac{\alpha \langle E \rangle_F}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)} + \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_R}{(1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R)} \right) (\varepsilon_z + (\varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_z)) \times \\ &\times \left(\frac{\alpha \langle E \rangle_F}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)} + \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_R}{(1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R)} \right)^{-1} \left(\frac{\alpha \langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_F}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)} + \frac{(1-\alpha) \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_R}{(1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R)} \right) = (41) \\ &= \frac{\langle E(\alpha) \rangle^\varepsilon}{(1+\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon)(1-2\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon)} (\varepsilon_z(1-\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon) + \langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon (\varepsilon_x + \varepsilon_y)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{xy} \rangle_{\alpha} &= \alpha \langle \sigma_{xy} \rangle_F + (1-\alpha) \langle \sigma_{xy} \rangle_R = (\alpha \langle E \rangle_F (1+\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1+\langle \nu \rangle_F)) \times \\ &\times \frac{(\alpha \langle E \rangle_F (1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1-2\langle \nu \rangle_F))}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1+\langle \nu \rangle_R)(\alpha \langle E \rangle_F (1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1-2\langle \nu \rangle_F))} \varepsilon_{xy} = \frac{\langle E(\alpha) \rangle^{\varepsilon}}{1+\langle \nu(\alpha) \rangle^{\varepsilon}} \varepsilon_{xy}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{yz} \rangle_{\alpha} &= \alpha \langle \sigma_{yz} \rangle_F + (1-\alpha) \langle \sigma_{yz} \rangle_R = (\alpha \langle E \rangle_F (1+\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1+\langle \nu \rangle_F)) \times \\ &\times \frac{(\alpha \langle E \rangle_F (1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1-2\langle \nu \rangle_F))}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1+\langle \nu \rangle_R)(\alpha \langle E \rangle_F (1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1-2\langle \nu \rangle_F))} \varepsilon_{yz} = \frac{\langle E(\alpha) \rangle^{\varepsilon}}{1+\langle \nu(\alpha) \rangle^{\varepsilon}} \varepsilon_{yz}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{zx} \rangle_{\alpha} &= \alpha \langle \sigma_{zx} \rangle_F + (1-\alpha) \langle \sigma_{zx} \rangle_R = (\alpha \langle E \rangle_F (1+\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1+\langle \nu \rangle_F)) \times \\ &\times \frac{(\alpha \langle E \rangle_F (1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1-2\langle \nu \rangle_F))}{(1+\langle \nu \rangle_F)(1+\langle \nu \rangle_R)(\alpha \langle E \rangle_F (1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1-2\langle \nu \rangle_F))} \varepsilon_{zx} = \frac{\langle E(\alpha) \rangle^{\varepsilon}}{1+\langle \nu(\alpha) \rangle^{\varepsilon}} \varepsilon_{zx}, \end{aligned} \quad (44)$$

где усредненные значения $\langle E(\alpha) \rangle^{\varepsilon}$ и $\langle \nu(\alpha) \rangle^{\varepsilon}$ в (39)-(44) определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \langle E(\alpha) \rangle^{\varepsilon} &= \\ &= \frac{(\alpha \langle E \rangle_F (1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1-2\langle \nu \rangle_F))(\alpha \langle E \rangle_F (1+\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1+\langle \nu \rangle_F))}{\alpha \langle E \rangle_F (1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \langle \nu(\alpha) \rangle^{\varepsilon} &= \\ &= \frac{\alpha \langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_F (1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_R (1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)}{\alpha \langle E \rangle_F (1+\langle \nu \rangle_R)(1-2\langle \nu \rangle_R) + (1-\alpha) \langle E \rangle_R (1+\langle \nu \rangle_F)(1-2\langle \nu \rangle_F)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Следует отметить, что для композиционного материала, изотропно-го в среднем, с эффективными коэффициентами (45) и (46) также выполняется соотношение, связывающее модуль сдвига с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона:

$$\langle G(\alpha) \rangle^\varepsilon = \frac{\langle E(\alpha) \rangle^\varepsilon}{1 + \langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon}. \quad (47)$$

Можно показать, что $\langle E(\alpha) \rangle^\varepsilon \geq \langle E(\alpha) \rangle^\sigma$, $\langle G(\alpha) \rangle^\varepsilon \geq \langle G(\alpha) \rangle^\sigma$, а также что для $\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon$, $\langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma$ и $\frac{\langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon}{\langle E(\alpha) \rangle^\varepsilon}$, $\frac{\langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma}{\langle E(\alpha) \rangle^\sigma}$ нет связывающих их неравенств для любого коэффициента α , где $0 < \alpha < 1$, используя рассуждения, описанные в предыдущем пункте.

Определим уменьшенные (по сравнению с «вилкой» Фойгта-Рейсса) «вилки» модулей упругости $[\langle E \rangle^\sigma; \langle E \rangle^\varepsilon]$, коэффициентов Пуассона $[\langle \nu \rangle^\sigma; \langle \nu \rangle^\varepsilon]$ и модулей сдвига $[\langle G \rangle^\sigma; \langle G \rangle^\varepsilon]$ в среднем изотропного композиционного материала как среднее значение соответствующих выражений (36)-(38) и (45)-(47):

$$\langle E \rangle^\sigma = \int_0^1 \langle E(\alpha) \rangle^\sigma d\alpha, \quad \langle E \rangle^\varepsilon = \int_0^1 \langle E(\alpha) \rangle^\varepsilon d\alpha, \quad (48)$$

$$\langle \nu \rangle^\sigma = \int_0^1 \langle \nu(\alpha) \rangle^\sigma d\alpha, \quad \langle \nu \rangle^\varepsilon = \int_0^1 \langle \nu(\alpha) \rangle^\varepsilon d\alpha, \quad (49)$$

$$\langle G \rangle^\sigma = \int_0^1 \langle G(\alpha) \rangle^\sigma d\alpha, \quad \langle G \rangle^\varepsilon = \int_0^1 \langle G(\alpha) \rangle^\varepsilon d\alpha. \quad (50)$$

После преобразования выражений (48)-(50), представим эффективные характеристики в виде:

$$\langle E \rangle^\sigma = \frac{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R \ln(\langle E \rangle_F / \langle E \rangle_R)}{\langle E \rangle_F - \langle E \rangle_R}, \quad (51)$$

$$\langle \nu \rangle^\sigma = \frac{\langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_R - \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_F}{\langle E \rangle_F - \langle E \rangle_R} + \frac{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R (\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R) \ln(\langle E \rangle_F / \langle E \rangle_R)}{(\langle E \rangle_F - \langle E \rangle_R)^2}, \quad (52)$$

$$\langle G \rangle^\sigma = \frac{\langle G \rangle_F \langle G \rangle_R \ln(\langle G \rangle_F / \langle G \rangle_R)}{\langle G \rangle_F - \langle G \rangle_R}, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle^\varepsilon = & \frac{1}{2} (\langle E \rangle_F + \langle E \rangle_R) + \\ & + \frac{H_F H_R (\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R)^2 (H_F^2 - H_R^2 - 2H_F H_R \ln(H_F / H_R))}{(H_F - H_R)^3}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\langle \nu \rangle^\varepsilon = \frac{H_F \langle \nu \rangle_F - H_R \langle \nu \rangle_R}{H_F - H_R} - \frac{H_F H_R (\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R) \ln(H_F / H_R)}{(H_F - H_R)^2}, \quad (55)$$

$$\langle G \rangle^\varepsilon = \frac{1}{2} (\langle G \rangle_F + \langle G \rangle_R), \quad (56)$$

где $H_F = \frac{\langle E \rangle_F}{(1 + \langle \nu \rangle_F)(1 - 2\langle \nu \rangle_F)}$ и $H_R = \frac{\langle E \rangle_R}{(1 + \langle \nu \rangle_R)(1 - 2\langle \nu \rangle_R)}$.

На рисунках 1-4 представлены графики «вилки» Фойгта-Рейсса для модулей Юнга $\langle E \rangle_F$, $\langle E \rangle_R$ (9), (20) (Рис. 1), коэффициентов Пуассона $\langle \nu \rangle_F$, $\langle \nu \rangle_R$ (10), (21) (Рис. 2) и модулей сдвига $\langle G \rangle_F$, $\langle G \rangle_R$ (11), (22) (Рис. 3, 4), а также сужений этой «вилки», полученных по предлагаемой методике усреднением эффективных модулей Юнга $\langle E \rangle^\sigma$, $\langle E \rangle^\varepsilon$ (51), (54) (Рис. 1), коэффициентов Пуассона $\langle \nu \rangle^\sigma$, $\langle \nu \rangle^\varepsilon$ (52), (55) (Рис. 2), и модулей сдвига $\langle G \rangle^\sigma$, $\langle G \rangle^\varepsilon$ (53), (56) (Рис. 3, 4).

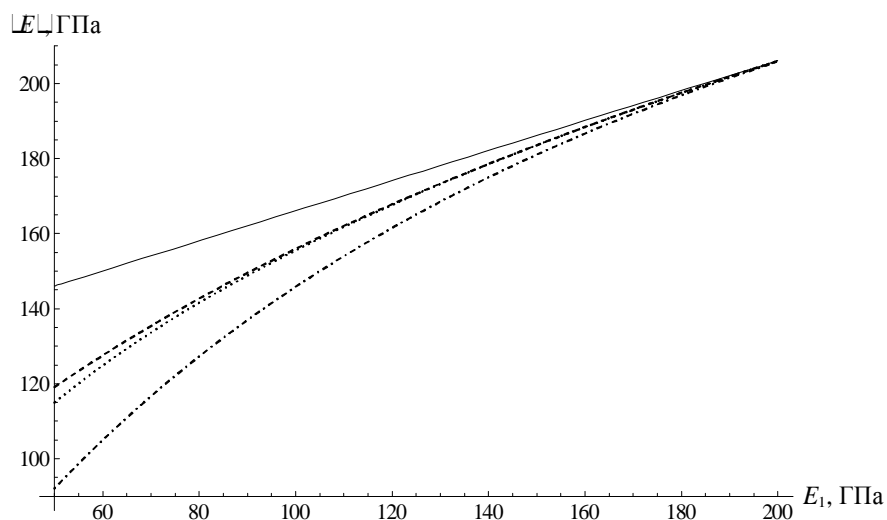


Рис. 1. Зависимость усредненных модулей Юнга от состава смеси ($\gamma_1 = 0.4$, $\gamma_2 = 0.6$, $E_2 = 210$ ГПа, $\nu_1 = 0.27$, $\nu_2 = 0.3$):
непрерывная линия – $\langle E \rangle_F$, штрихпунктирная линия – $\langle E \rangle_R$,
пунктирная линия – $\langle E \rangle^\varepsilon$, точечная линия – $\langle E \rangle^\sigma$

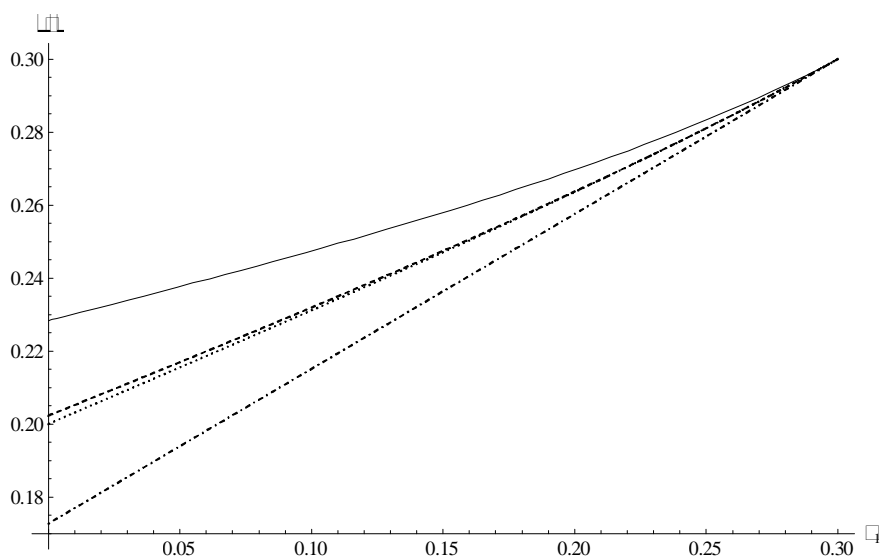


Рис. 2. Зависимость усредненных коэффициентов Пуассона от состава смеси ($\gamma_1 = 0.4$, $\gamma_2 = 0.6$, $E_1 = 190$ ГПа, $E_2 = 210$ ГПа, $\nu_2 = 0.3$):
непрерывная линия – $\langle \nu \rangle_F$, штрихпунктирная линия – $\langle \nu \rangle_R$,
пунктирная линия – $\langle \nu \rangle^\varepsilon$, точечная линия – $\langle \nu \rangle^\sigma$

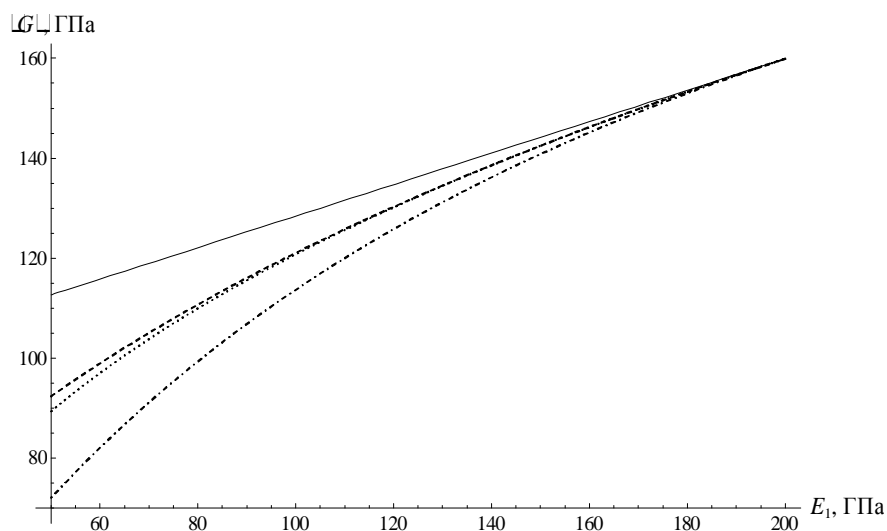


Рис. 3. Зависимость усредненных модулей сдвига от модулей Юнга состава смеси ($\gamma_1 = 0.4$, $\gamma_2 = 0.6$, $E_2 = 210$ ГПа, $\nu_1 = 0.27$, $\nu_2 = 0.3$):
непрерывная линия – $\langle G \rangle_F$, штрихпунктирная линия – $\langle G \rangle_R$,
пунктирная линия – $\langle G \rangle^\varepsilon$, точечная линия – $\langle G \rangle^\sigma$

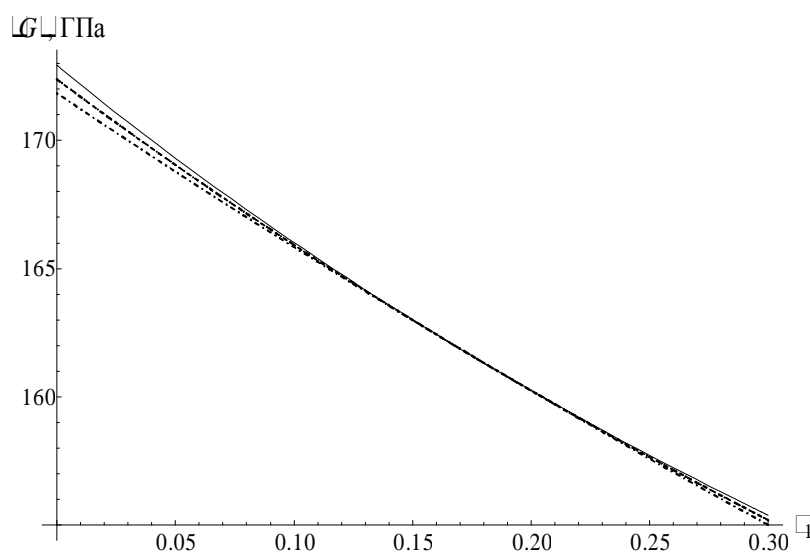


Рис. 4. Зависимость усредненных модулей сдвига от коэффициентов Пуассона состава смеси ($\gamma_1 = 0.4$, $\gamma_2 = 0.6$, $E_1 = 190$ ГПа, $E_2 = 210$ ГПа, $\nu_2 = 0.3$):
непрерывная линия – $\langle G \rangle_F$,
штрихпунктирная линия – $\langle G \rangle_R$, пунктирная линия – $\langle G \rangle^\varepsilon$,
точечная линия – $\langle G \rangle^\sigma$

Произведем оценку взаимнообратности матриц жесткости

$$J = \int_0^1 J(\alpha) d\alpha \text{ и податливости } E = \int_0^1 E(\alpha) d\alpha, \text{ т.е. оценим близость к нулю}$$

выражения:

$$\|J \cdot E - I\|, \quad (57)$$

где I – единичная матрица, $\|A\| = \max_{i,j=1}^6 |a_{i,j}|$ – норма матрицы A .

Отметим, получить аналитическую оценку близости к нулю (57) невозможно, однако при подстановке конкретных значений модулей упругости и коэффициентов Пуассона компонент композиционного материала погрешность взаимнообратности матриц жесткости J и податливости E составляет не более 10%.

Выводы. Предложен метод сужения «вилки» Фойгта-Рейсса, определяющей разброс модуля упругости, коэффициента Пуассона и модуля сдвига композиционного материала без использования вариационных принципов.

Установлено, что только модули упругости (9), (20) и (11), (22), стоящие на диагоналях матриц податливости, полученных по Фойгту и Рейссу, могут являться верхней и нижней границей реальных модулей упругости композитов. Остальные коэффициенты матриц могут (в смысле верхней и нижней оценки) меняться местами, что зависит от конкретной реализации упругих характеристик компонент композиционного материала.

Список использованных источников

1. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
2. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. М.: Наука, 1985. 304 с.
3. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin: Teubner. 1928. 962 s.
4. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung // Z. Angew. Math. Und Mech. 1929. V 9. № 1. S. 49-58.