

УДК 539.3

**НЕЛОКАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ
В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ ПРИ ЕГО ОСЕВОМ СЖАТИИ****Кравчук Александр Степанович**

д-р физ.-мат. наук

Кравчук Анжелика Ивановна

канд. физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. Актуальность исследований заключается в том, что при использовании моделей типа Винклера при решении контактных задач для слоя конечной толщины всегда используется предположение об однородном напряженно-деформированном состоянии стержней. Это предположение может вносить существенную ошибку в вычисляемое распределение контактных напряжений. В статье рассматривается ряд моделей построения нелокального распределения напряжений в стержне. В частности, интегральная и дифференциальная модели Эрингена, а также одномерная модель, предлагаемая авторами статьи, нелокальность в которой определяется по результатам простого сжатия/растяжения призматического образца. Установлено, что если нелокальность распределения напряжений в одномерном образце физически существует даже для упругих деформаций (что несложно установить по экспериментально измеренному напряжению в середине стержня), то это явление окажет определяющее влияние на разработку новых методов определения коэффициента Пуассона, или вовсе приведет к отказу от его использования в уравнениях состояния. Также в статье обсуждаются неточные заключения Эрингена как для многомерного случая, так и приводятся некоторые примеры математической неточности выводов Эрингена для одномерной нелокальности.

Ключевые слова: нелокальная модель Эрингена; интегро-дифференциальные уравнения; обычные дифференциальные уравнения; уравнения состояния; нелокальное распределение напряжений.

NONLOCAL DISTRIBUTION OF STRESSES AND STRAINS IN A PRISMATIC ROD UNDER AXIAL COMPRESSION

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences

Kravchuk Anzhelica Ivanovna

candidate of physical and mathematical sciences

Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. Relevance of studies consists in that when using the Winkler-type models for solving contact problems additionally always used the assumption of a uniform stress-strain state of rods which represent the coating. This assumption may introduce a significant error in the calculated distribution of contact stresses. This article discusses a number of models for constructing nonlocal distribution of stresses in a rod. In particular, the integral and differential models Eringen as well as a one-dimensional model proposed by the authors, in which the non-locality is determined by the results of a simple compression/tension of the prismatic rod. Found that if the non-locality of the stress distribution in the one-sample physically exists even for the elastic strain (which is easy to mount on the experimentally measured voltage in the middle of the rod), this phenomenon will have a decisive influence on the development of new methods for the determination of Poisson's ratio, or even lead to the rejection of his use the equations of state . The article also is discussed how Eringen made inaccurate conclusion in the multidimensional case, and are gave some examples of mathematical mistakes Eringen which is findings for the one-dimensional non-locality.

Key words: nonlocal model Eringen; integro-differential equations; ordinary differential equations; the equation of state; non-local stress distribution.

Введение. В настоящее время в научной литературе получило широкое распространение тенденция решения различного рода нелокальных задач. Все работы по механике твердого тела держатся в этом тренде, который, как считается, позволяет решать задачи с учетом микро- и наноструктуры [1-5].

К настоящему времени в данном направлении сложился определенный классический инструментарий. Его основу составляют работы А.К. Эренгена [4; 5]. В основном при решении задач используются уравнения, приведенные в работе А.К. Эренгена 1983 г. [4]. Упомянутые уравнения нелокальности распределения напряжений для упругой деформации твердого тела в статье [4] даны в двух формах: основная – интегральная и выводимая из нее дифференциальная. В качестве очевидного недостатка этих уравнений можно указать в первую очередь набор параметров, которые до настоящего времени не стандартизированы и не существуют физических методов их определения. Более того не было попыток на примере простейших краевых задач пусть даже одномерных провести анализ предложенных уравнений и подтвердить хотя бы качественно адекватность последних.

Следует отметить, что А.К. Эренген еще более обобщил свои результаты монографии 2002 года, что позволило избежать теоретических неточностей ранней работы [5], что сделало вообще невозможным верификацию физической адекватности предлагаемых соотношений.

При более близком знакомстве с текстом статьи [4] возникает ряд математических вопросов, ответы на которые не очевидны. Например, почему автор использует дифференциальный оператор строго определенного вида при переходе от интегральных уравнений к дифференциальным уравнениям нелокального распределения напряжений, хотя сам же утверждает, что оператор может быть любым. На самом деле, как показано предлагаемой статье, и ядро

интегрального оператора, и дифференциальный оператор перехода взаимно обуславливают вид друг друга через совместное интегро-дифференциальное уравнение и не допускают произвола выбора больше чем определение некоторых констант [5].

Кроме того, практическая актуальность данных исследований заключается еще и в том, что при использовании моделей типа Винклера при решении контактных задач для слоя конечной толщины всегда используется предположение об однородном напряженно-деформированном состоянии стержней [6; 7]. Это предположение, неверное даже в макрослучае (достаточно вспомнить процесс клепки), вносит существенную ошибку в вычисляемое распределение контактных напряжений при упругопластическом внедрении индентора при испытаниях на твердость.

Современные основы моделирования нелокальности распределения напряжений в твердом теле по Эрингену. Рассмотрим основную работу А.К. Эрингена [4], в которой нелокальные уравнения даны как в исходной интегро-дифференциальной тензорной форме:

$$\sigma_{ij,i} + \rho(f_j - \ddot{u}_j) = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(x) = \iiint_V K(|x' - x|, \tau) \cdot \bar{\sigma}_{ij}(x') dx' \quad (2)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(x') = \lambda \cdot \bar{\Theta}(x') \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \bar{\varepsilon}_{ij}(x'), \quad (3)$$

$$\bar{\Theta}(x') = \sum_{i=1}^3 \bar{\varepsilon}_{ii}(x'),$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(x') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(x')}{\partial x'_j} + \frac{\partial u_j(x')}{\partial x'_i} \right), \quad (4)$$

так и, исходя из последней, делается вывод системы нелокальных дифференциальных уравнений [2; 4]:

$$L_x(\sigma_{i,j}(x)) = \bar{\sigma}_{ij}(x), \quad (5)$$

где σ_{ij} – нелокальный тензор напряжений; ρ – плотность материала, в модели А.К. Эрингена полагается константой; f_j – плотность массовых сил [4; 5]; i – знак дифференцирования по x_i ; $\bar{\sigma}_{ij}$ – локальный тензор напряжений (средний по граням элементарного объема V), получаемый из решения непрерывной краевой задачи; $K(|x' - x|, \tau)$ – ядро интегрального оператора; $\tau = e_0 a / \ell$; e_0 – константа для каждого материала; a – характерная длина во внутренней наноструктуре материала в объеме V (например, межатомное расстояние); ℓ – характерная внешняя длина объема материала V (длина ребра объема V); $\bar{\varepsilon}_{ij}$ – локальный тензор деформации; λ, μ – параметры Ламе; δ_{ij} – символы Кронекера; $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка внутри элементарного объема; L_x – дифференциальный оператор вида [5]:

$$L_x = (1 - \tau^2 \cdot \ell^2 \Delta_x), \quad \Delta_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \quad (6)$$

Прежде всего, удивляют результаты анализа размерностей в (1), т.к. f_j в уравнении баланса (1) должно иметь размерность ускорения, а не плотности массовых сил [4; 5], только в этом случае домножение (1) на V дает уравнение баланса сил. Очевидно, что произведение целиком $\rho \cdot f_j$ представляет собой плотность массовых сил [8]. Если рассматривать f_j как плотность массовых сил, то (1) следует исправить простейшим способом:

$$\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (7)$$

Из (7) (в понимании того, что по общепринятому соглашению опущен знак суммирования по j [8]) уже можно получить общепринятые уравнения равновесия статики твердого тела [8; 9]. Однако подчеркнем, что ни (1), ни (7) не будут использоваться в дальнейшем в данной статье, а равновесие стержня при его осевом нагружении будет обеспечиваться элементарным равенством интегральных нагрузок, действующих на его концах.

Перейдем к рассмотрению уравнений (2)-(6). Обращает на себя внимание тот факт, что для произвольного ядра $K(|x' - x|, \tau)$ (2) дифференциальный оператор L_x (6) совершенно не обязательно является обратным. Напомним, что размеры области интегрирования фиксированы объемом V , и при дифференцировании (2) необходимо использовать правила дифференцирования интеграла, зависящего от параметра [10]. При применении дифференциального оператора L_x (6) к интегральному уравнению (2) с фиксированной областью интегрирования V мы получим не (5) как утверждается в [2; 5], а выражение вида [10]:

$$L_x[\sigma_{ij}(x)] = \iiint_V L_x[K(|x' - x|, \tau)] \cdot \bar{\sigma}_{ij}(x') dx'. \quad (8)$$

Из (5) и (8) следует, что для получения уравнения (5) из уравнения (2) необходимо, чтобы имело место нетривиальное решение следующего интегро-дифференциальное уравнение (собственно тривиальное решение $\bar{\sigma}_{ij}(x') \equiv 0$ всегда будет удовлетворять предлагаемому ниже уравнению):

$$\iiint_V L_x[K(|x' - x|, \tau)] \cdot \bar{\sigma}_{ij}(x') dx' = \bar{\sigma}_{ij}(x'). \quad (9)$$

Таким образом, из (2) следует, что необходимо экспериментально подобрать ядро $K(|x' - x|, \tau)$ для описания нелокальных свойств тела. Из (9) следует, что к ранее найденному ядру необходимо подобрать дифференциальный оператор L_x так, чтобы уравнение (9) имело единственное не тривиальное решение.

Однако для произвольного ядра $K(|x' - x|, \tau)$, указанного в [4], единственный дифференциальный оператор L_x (6) может подойти в единичных случаях. Более того, условия, налагаемые на ядро и дифференциальный оператор, для решения (9) не обсуждаются ни в одной из считающихся «классических» математических работ [4; 5].

Таким образом, установлено, что неоднородное дифференциальное уравнение нелокальности распределения напряжений (5) [2; 4] в твердом теле, в общем случае ядра $K(|x' - x|, \tau)$ не является следствием уравнения (2).

Применение однородного уравнения, соответствующего (5), к анализу нелокального распределения напряжений. В принципе, исходя из общего смысла построения общего решения дифференциального уравнения (5), можно использовать решение соответствующего (5) однородного уравнения, что и может рассматриваться как определение поведения напряжений в объеме V :

$$L_x[\sigma_{ij}(x)] = 0, \text{ при } x \in V. \quad (10)$$

Тогда в уравнении (10) переменная $x \in V$ будет играть роль быстрой переменной, как в теории упорядоченных композиционных тел [11], а дифференциальное уравнение (5) должно быть разностным и связано с медленными переменными с помощью краевых условий на границе V .

Применим уравнения (2)-(4) в интегральной формулировке к решению задачи о нелокальном распределении напряжений в

стержне при его осевом сжатии. Перейдем к рассмотрению одномерного варианта статических уравнений (2)-(4), а именно нелокальной статической деформации одномерного стержня (Рисунок 1). При этом очевидно, что для стержня $\bar{\sigma}_{11} = \langle \sigma_{11} \rangle$, где $\langle \sigma_{11} \rangle$ – однородное среднее напряжение, действующее на площадке перпендикулярной оси стержня квадратным сечением $\Delta \times \Delta$ и длиной h . Кроме того, $\bar{\varepsilon}_{11} = \langle \varepsilon_{11} \rangle$, где $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ – однородная средняя деформация призматического стержня длиной h и квадратным сечением $\Delta \times \Delta$. Будем предполагать, что $\langle \sigma_{11} \rangle$ и $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ являются константами, т.е. из (2)-(4) получаем следующую систему уравнений (рисунок 1):

$$\sigma_{11}(x_1) = \int_{-h}^0 K(\zeta - x_1) d\zeta \cdot \langle \sigma_{11} \rangle \quad (11)$$

$$\langle \sigma_{11} \rangle = E \cdot \langle \varepsilon_{11} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{11} \rangle = \frac{w(0) - w(-h)}{h} = \frac{w(0)}{h}. \quad (12)$$

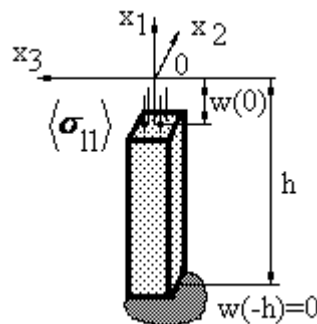


Рис. 1. Деформирование призматического стержня осевой нагрузкой

Для достижения внутренней непротиворечивости уравнений (11), (12) достаточно, чтобы выполнялось условие нормировки ядра нелокальности свойств стержня по его длине:

$$\frac{1}{h^2} \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 K(\zeta - x_1) d\zeta dx_1 = 1. \quad (13)$$

Очевидно, что никаких ограничений на поведение $K(\zeta - x_1)$ не существует, кроме требования существования Риманова интеграла

$$\int_{-h}^0 \int_{-h}^0 K(\zeta - x_1) d\zeta dx_1.$$

Неоднородное одномерное дифференциальное уравнение нелокальности свойств призматического стержня. Рассмотрим дифференциальные уравнения нелокальности распределения напряжений в твердом теле (5), (6). Приводя их к уравнениям для неоднородного стержня, объем которого, по существу, является макроточкой композиционного материала, получаем из (5) и (6) для нелокального распределения напряжения $\sigma_{11}(x_1)$ по стержню и локального напряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ дифференциальное уравнение [2]:

$$\sigma_{11}(x_1) - e_0^2 \cdot a^2 \cdot \sigma_{11}''(x_1) = \langle \sigma_{11} \rangle. \quad (14)$$

В качестве краевых условий для единственности решения (14) и равновесия стержня необходимо использовать равенства $\sigma_{11}(0) = \sigma_{11}(-h) = \sigma_0$.

Попытаемся получить (14) из уравнения (11) и проиллюстрируем математическую проблему необходимости соответствия ядра в (11) и одномерного аналога дифференциального оператора L_x (6) на конкретном примере.

К (11) применим одномерный аналог оператора L_x (6), получаем уравнение [10]:

$$\sigma_{11}(x_1) - e_0^2 \cdot a^2 \sigma_{11}''(x_1) = \int_{-h}^0 \left(K(\zeta - x_1) - e_0^2 \cdot a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} K(\zeta - x_1) \right) d\zeta \cdot \langle \sigma_{11} \rangle \quad (15)$$

Очевидно, что для того чтобы из (11) получить (14) необходимо и достаточно, что бы было выполнено условие:

$$\left(K(\zeta - x_1) - e_0^2 \cdot a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} K(\zeta - x_1) \right)_{\rho=\zeta-x_1} = (K(\rho) - e_0^2 \cdot a^2 \cdot K''(\rho)) = \frac{1}{-h}. \quad (16)$$

Уравнение (16) дополним краевым условием $K(0) = K(-h) = s$, где s – произвольная константа. Тогда решение (16) имеет вид:

$$K(\zeta - x_1) = \frac{-1 - e^{\frac{h}{a \cdot e_0}} + (1 + h \cdot s) \cdot e^{-\frac{(\zeta - x_1)}{a \cdot e_0}} \cdot \left(1 + e^{\frac{h+2(\zeta - x_1)}{a \cdot e_0}} \right)}{h \cdot \left(1 + e^{\frac{h}{a \cdot e_0}} \right)}. \quad (17)$$

Таким образом, можно получить (14) из (11) при помощи дифференциального оператора L_x (6) только если ядро имеет конкретный вид (17). Единственное, что можно варьировать и, соответственно, необходимо экспериментально доопределить это значение константы s . Таким образом, на примере (14)-(17) проиллюстрирована ошибочность предположения А.К. Эрингена [5] о независимости друг от друга ядра интегрального оператора (11) и вида дифференциального оператора (6).

Вернемся к решению уравнения (14). При указанных краевых условиях его решение имеет вид:

$$\sigma_{11}(x_1) = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle \left(1 + e^{\frac{h}{e_0 a}} \right) + (\sigma_0 - \langle \sigma_{11} \rangle) \cdot \left(e^{-\frac{x_1}{e_0 a}} + e^{\frac{h+x_1}{e_0 a}} \right)}{1 + e^{\frac{h}{e_0 a}}}. \quad (18)$$

Для определения константы σ_0 в решении уравнения (18) его необходимо также как и в (11), (12) дополнить требованием:

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \sigma_{11}(x_1) dx_1. \quad (19)$$

После непосредственной подстановки (18) в (19) и проведения вычислений получаем следующее равенство $\sigma_0 = \langle \sigma_{11} \rangle$ и, следовательно, в уравнениях (14) и (18) нет нелокальности, т.к. верно тождество:

$$\sigma_{11}(x_1) \equiv \langle \sigma_{11} \rangle. \quad (20)$$

Однородное дифференциальное уравнение соответствующее одномерному уравнению А.К. Эрингена (14). Далее рассмотрим одномерный аналог однородных дифференциальных уравнений нелокальности (10) при выполнении предположения (19). Тогда для исследования одномерного варианта (10) достаточно в (18) положить $\langle \sigma_1 \rangle = 0$. В качестве краевых условий, как всегда, используем равенства $\sigma_{11}(0) = \sigma_{11}(-h) = \langle \sigma_{11} \rangle$. Решением одномерного варианта (10) при указанных краевых условиях является выражение (рисунок 2):

$$\sigma_{11}(x_1) = \langle \sigma_{11} \rangle \frac{h \cdot ch\left(\frac{h}{2 \cdot e_0 \cdot a}\right)}{2 \cdot e_0 \cdot a \cdot sh\left(\frac{h}{2 \cdot e_0 \cdot a}\right)} \cdot \frac{e^{-\frac{x_1}{e_0 a}} + e^{\frac{h+x_1}{e_0 a}}}{1 + e^{\frac{h}{e_0 a}}}. \quad (21)$$

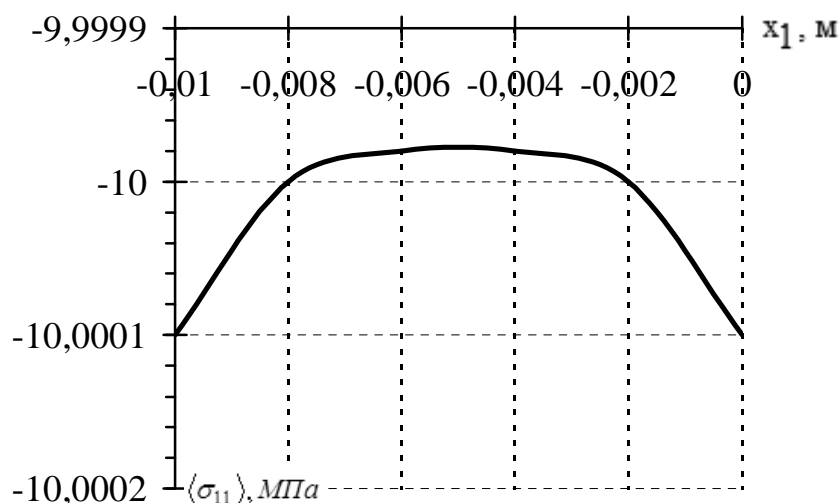


Рис. 2. Нелокальное распределение напряжений в стержне при сжатии (21)

$$(\langle \sigma_{11} \rangle = -10 МПа; h = 0.01 м, e_0 \approx 0.39 [4], a \approx \pi [4])$$

Исходя из результатов численного эксперимента, можно сказать, что однородное уравнение соответствующее уравнению А.К. Эрингена (14) [2; 4] физически адекватно описывает процесс нелокального сжатия стержня. Согласно (21) наибольшее напряжение при сжатии образца концентрируется на концах стержня (Рисунок 2). Нелокальность распределения напряжений усиливается при увеличении действующих на концах нагрузок и увеличении длины образца.

Сравнение результатов анализа нелокальности распределения напряжений в стержне по трем вариантам уравнений (11), (14) и (21). Нелокальность в уравнении (11) вариативна, т.е. можно использовать различные ядра $K(\zeta - x_1)$, в частности, аналогичные ядрам, предложенным А.К. Эрингеном [5] и удовлетворяющие условию (13):

$$\frac{3}{2 \cdot h^2} \left(1 - \frac{|\zeta - x_1|}{h} \right), \quad \frac{e}{2 \cdot h^2} \cdot e^{-\frac{|\zeta - x_1|}{h}}, \quad \frac{1}{(-1 + \frac{1}{e} + \sqrt{\pi} \cdot 0.842701\dots) \cdot h^2} e^{-\frac{(\zeta - x_1)^2}{h^2}}.$$

Таким образом, наиболее общим видом нелокального поведения стержня при осевом нагружении равномерной нагрузкой на грани перпендикулярной оси стержня являются уравнения (11)-(13). Дифференциальное уравнение (14) при условии (19) не описывает нелокальные свойства. Дифференциальное уравнение (10) и его решение в одномерном случае (21) дают нелокальное распределение напряжений в стержне качественно верное с точки зрения наблюдаемых экспериментальных результатов на простое сжатие.

Гипотеза о независимости нелокального напряженного состояния от механических характеристик призматического стержня при сжатии. Очевидно, что для единственности определения (в математическом смысле) разностного ядра нелокальности $K(x)$ (11) необходимо задать дополнительные условия, например, на поведение производных ядра на концах отрезка $[-h, 0]$. Поэтому использовать (11)

практически не возможно. С точки зрения прикладных расчетов хотелось бы получить рекомендации о виде нелокальности, исходя из опытов на простое сжатие/растяжение образца.

Очевидно, что даже при макроскопическом сжатии до начала пластического течения материала образец деформируется нелокально, т.к. на концах образца после разгрузки будут видны утолщения относительно середины образца (иначе не было бы клепаных соединений).

Таким образом, в результате качественного анализа процесса одномерного сжатия образца установлено, что наибольшие нелокальные упругопластические деформации и напряжения концентрируются у концов стержня. По аналогии с решением двумерной задачи с помощью функции напряжений [9] будем считать, что распределение напряжений не зависит от механических характеристик стержня. Поэтому в качестве уравнения, описывающего нелокальное поведение напряжений в стержне, будем использовать аналог дифференциального уравнение Шредингера для стационарных состояний, которое является одномерным аналогом (10) [12]. Будем использовать оператор (6) с коэффициентом $\alpha_{сж} = (\ell \cdot \tau)^{-1}$, значение которого будет устанавливаться исходя из макроскопических опытов по сжатию образца:

$$\alpha_{сж}^2 \cdot \sigma_{11}(x_1) - \sigma_{11}''(x_1) = 0. \quad (23)$$

Исходя из краевых условий $\sigma_{11}(0) = \sigma_{11}(-h) = \sigma_0$, можно записать по аналогии с (18), (21), что решением (23) является выражение:

$$\sigma_{11}(x_1) = \langle \sigma_{11} \rangle \frac{\alpha_{сж} \cdot h \cdot ch\left(\frac{\alpha_{сж} \cdot h}{2}\right)}{2 \cdot sh\left(\frac{\alpha_{сж} \cdot h}{2}\right)} \cdot \frac{e^{-\alpha_{сж} \cdot x_1} + e^{\alpha_{сж} \cdot (h+x_1)}}{1 + e^{\alpha_{сж} \cdot h}}. \quad (24)$$

Отметим, что условие (19) будет автоматически выполняться. Будем предполагать, что $\alpha_{сж}$ – константа характерная для материала и определенной длины образца, которую можно определить исходя из непосредственного измерения напряжений в середине стержня длиной h при его осевом сжатии. Т.е. если при проведении экспериментов на одноосное сжатие должны быть установлены значения $\sigma_{11}(-h/2)$ и $\langle \sigma_{11} \rangle$, тогда $\alpha_{сж}$ находится непосредственно из нелинейного уравнения, следующего из (24):

$$\frac{sh(\beta_{сж})}{\beta_{сж}} = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\sigma_{11}\left(-\frac{h}{2}\right)}, \quad (25)$$

где $\beta_{сж} = \frac{\alpha_{сж} \cdot h}{2}$. Очевидно, что если нелокальности распределения напряжений в стержне нет, т.е. $\langle \sigma_{11} \rangle / \sigma_{11}\left(-\frac{h}{2}\right) = 1$, $\beta_{сж} = \alpha_{сж} = 0$, то из (23) (с учетом краевых условий) следует локальное распределение напряжений. Качественный анализ (25) указывает, что (25) будет корректно разрешено для $\beta_{сж} > 1$, если правая часть (25) будет больше единицы, а, следовательно, распределение напряжений будет нелокальным.

Уравнение нелокальности распределения напряжений в призматическом стержне при растяжении. При растяжении образца, также как и при его сжатии, он деформируется нелокально, что выражается в образовании шейки в середине образца. Это может свидетельствовать о концентрации нелокальных растягивающих напряжений. К сожалению, уравнение (23) не подходит для описания данного процесса. Однако можно провести качественный анализ распределения напряжений при растяжении образца с помощью решения дифференциального уравнения вида:

$$\alpha_{расм}^2 \cdot \sigma_{11}(x_1) + \sigma_{11}''(x_1) = 0, \quad (26)$$

Уравнение (26) в совокупности с краевыми условиями $\sigma_{11}(0) = \sigma_{11}(-h) = \sigma_0$ и нормирующим уравнением (19) определяет следующее поведение напряжений в стержне:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1) = \langle \sigma_{11} \rangle & \frac{\alpha_{расм} \cdot h \cdot ch\left(\frac{\alpha_{расм} \cdot h}{2}\right)}{2 \cdot sh\left(\frac{\alpha_{расм} \cdot h}{2}\right)} \times \\ & \times \sec\left(\frac{\alpha_{расм} \cdot h}{2}\right) \cos\left(\alpha_{расм} \cdot \frac{(h + 2 \cdot x_1)}{2}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

где коэффициент $\alpha_{расм}$ также как и $\alpha_{сж}$ будет устанавливаться из макроскопических опытов по растяжению образца, исходя из определённых опытным путем значений $\sigma_{11}(-h/2)$ и $\langle \sigma_{11} \rangle$ с помощью уравнения:

$$\frac{sh(\beta_{расм}) \cos(\beta_{расм})}{\beta_{расм} ch(\beta_{расм})} = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\sigma_{11}\left(-\frac{h}{2}\right)}, \quad (28)$$

где $\beta_{расм} = \frac{\alpha_{расм} \cdot h}{2}$. Если нелокальности нет, т.е. $\langle \sigma_{11} \rangle / \sigma_{11}\left(-\frac{h}{2}\right) = 1$, то $\beta_{расм} = \alpha_{расм} = 0$ и из (26) следует локальное распределение напряжений. Уравнение (28) будет корректно разрешено для $\beta_{расм} < 1$, если правая часть (28) будет меньше единицы.

Нелокальное деформированное состояние призматического стержня квадратного сечения. Пусть у нас дана функция \mathfrak{S} , описывающая связь средних напряжений и деформаций в опытах на простое растяжение призматического образца:

$$\langle \sigma_{x_1} \rangle = \mathfrak{S}(\langle \varepsilon_{x_1} \rangle). \quad (29)$$

В этом случае, очевидно, предположить, что нелокальное деформированное состояние образца восстанавливается по нелокальному напряженному, исходя из уравнений (24) или (27) с помощью выражения:

$$\varepsilon_{11}(x_1) = \gamma \cdot \mathfrak{S}^{-1}(\sigma_{11}(x_1)), \quad (30)$$

где γ – поправочный коэффициент, обеспечивающий нормировку деформаций стержня и определяемый из уравнения:

$$\gamma = \frac{\mathfrak{S}^{-1}(\langle \sigma_{11} \rangle)}{\frac{1}{h} \int_{-h}^0 \mathfrak{S}^{-1}(\sigma_{11}(x_1)) dx_1} \quad (31)$$

Для линейной функции \mathfrak{S} уравнение (31) совпадает с (19) и $\gamma \equiv 1$. Т.е. при растяжении образца из (28), (31) следует, что распределение по оси стержня деформации при растяжении определяются выражением:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x_1) = & \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{E} \frac{\alpha_{расм} \cdot h \cdot ch\left(\frac{\alpha_{расм} \cdot h}{2}\right)}{2 \cdot sh\left(\frac{\alpha_{расм} \cdot h}{2}\right)} \times \\ & \times \sec\left(\frac{\alpha_{расм} \cdot h}{2}\right) \cos\left(\alpha_{расм} \cdot \frac{(h + 2 \cdot x_1)}{2}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

где E – модуль упругости образца.

Будем считать, что материал при деформации сохраняет свой объем. Тогда распределение поперечной деформации стержня – относительное уменьшение каждой из сторон квадратного сечения стержня – будет составлять $\sqrt{\varepsilon_{11}(x_1)}$. При этом максимальное значение будет равно $\sqrt{\varepsilon_{11}(0)}$, т.е. будет образовываться шейка. Указанное значение максимальной поперечной деформации многократно превосходит

среднее значение деформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \sigma_{11} \rangle / E$ для стержня. Таким образом, если нелокальность напряженного состояния стержня по типу (27) и (32) будет подтверждена экспериментально, то соответственно, необходимо существенно уточнить методы определения коэффициента Пуассона, а также уравнения состояния, содержащие этот коэффициент.

Выводы. Установлено, что неоднородное дифференциальное уравнение нелокальности распределения напряжений (5) [2; 4] в твердом теле в общем случае ядер нелокальности $K(|x' - x|, \tau)$ в (2) и дифференциальных операторов L_x (6) не является следствием уравнения (2). На примере применения одномерных налогов (2), (5) и (6) к анализу напряженного состояния стержня (11)-(17) проиллюстрирована ошибочность указанного предположения А.К. Эрингена [5] о независимости $K(|x' - x|, \tau)$ и L_x .

Одномерный аналог дифференциального уравнения А.К. Эрингена (6) [2; 4] (уравнение (14)) при физически очевидном условии (19) вообще не описывает нелокальные свойства.

Предлагается использовать уравнения (23)-(25) в качестве определения нелокального поведения напряжений и деформаций при сжатии стержня, качественно подтверждающие опыты на сжатие образцов.

Предложено уравнение (26) с решением (27), описывающие нелокальность распределения напряжений при растяжении призматического образца.

Если нелокальность напряженного состояния стержня по типу (27) и (32) будет подтверждена экспериментально, то соответственно, необходимо существенно уточнить методы определения коэффициента Пуассона, а также уравнения состояния, содержащие этот коэффициент.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Khademolhosseini F. Nonlocal continuum shell models for torsion of single-walled carbon nanotubes. The thesis for the degree of master of applied science. Vancouver: The University of British Columbia, 2009. 102 p.
2. Simsek M. Forced vibration of an embedded single-walled carbon nanotube traversed by a moving load using nonlocal Timoshenko beam theory // *Steel and Composite Structures*. 2011. V. 11. № 1. P. 59-76.
3. Narendar S., Gupta S.S., Gopalakrishnan S. Wave propagation in single-walled carbon nanotube under longitudinal magnetic field using nonlocal Euler-Bernoulli beam theory // *Applied Mathematical Modelling*. 2012. № 36. P. 4529-4538.
4. Eringen A.C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves // *J. Appl. Phys.* 1983. V. 54. № 9. P. 4703-4710.
5. Eringen A.C. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Springer. 2002. 376 p.
6. Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. Kravchuk A., Rymuza Z., Jarzabek D. Penetration of a pyramid indenter into a multilayer coating // *Int. J. Mat. Res. (formerly Z. Metallkd.)*. 2009. V. 100. № 7. P. 933-935.
8. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
9. Жемочкин Б.Н. *Теория упругости*. М.: Госстойиздат. 1957. 257 с.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. М.: Наука, 1986. 544 с.
11. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических задачах. Математические задачи механики композиционных материалов*. М.: Наука. 1984. 352 с.
12. Маррел Дж., Кеттл С., Теддер М. *Теория валентности*. М.: Мир. 1968. 260 p.