УДК 681.51

ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИИ А.М. ЛЯПУНОВА

Бейсенби Мамырбек Аукебаевич

д-р тех. наук

Сулейменова Саламат Темирбековна

магистрант
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
Астана (Казахстан)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. В статье излагается новый подход к исследованию систем управления в условиях неопределенности методом функции Ляпунова. Система управления обеспечивает устойчивость при любых изменениях неопределенных параметров. Область устойчивости установившихся состояний системы получена в виде простейших неравенств по неопределенным параметрам объекта управления и выбираемым параметрам устройства управления.

Ключевые слова: робастная устойчивость; система управления; функция Ляпунова; катастрофа; эллиптическая омбилика.

THE RESEARCH ROBUST STABILITY OF CONTROL SYSTEMS METHOD OF LYAPUNOV'S FUNCTION

Beisenbi Mamyrbek Aukebayevich

doctor of engineering

Suleimenova Salamat Temirbekovna

undergraduate student
Eurasian National University, Astana (Kazakhstan)

Abstract. This article covers a new approach to research of control systems in uncertainty with use of Lyapunov's function. Control system provides stability at any changes of uncertain parameters. Stability region of steady states of the system is obtained in the form of simple inequations according to uncertain parameters of control object and selected controller parameters.

Key words: robust stability; control system; Lyapunov's function; catastrophe; elliptic umbilic.

Проблеме исследования робастной устойчивости систем управления посвящено большое число работ. В этих работах [1; 2] в основном исследуется робастная устойчивость полиномов и матриц в рамках линейного принципа устойчивости непрерывных и дискретных систем управления. Универсальным методом исследования устойчивости динамических систем является метод функции А.М. Ляпунова [3; 4].

Рассмотрим систему управления с одним входом и одним выходом, описываемую уравнением состояния:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $x(t)\in R^n$ – вектор состояния объекта управления; $u(t)\in R^1$ – скалярная функция управляющих воздействий; $A\in R^{n\times n}$ – матрица объекта управления с неопределенными параметрами размерности $n\times n$, $B\in R^{m\times 1}$ – матрица управления размерности $m\times 1$. Матрицы *A* и *b* имеют следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{pmatrix}$$

Закон управления $u(t)$ задан в форме суммы трехпараметрических структурно – устойчивых отображений (катастрофа эллиптическая омбилика):

$$\begin{aligned} u(t) &= -x_2^3+3x_2x_1^2-k_{12}\left(x_1^2+x_2^2\right)+k_2x_2+k_1x_1-x_4^3+3x_4x_3^2-k_{34}\left(x_4^2+x_3^2\right)+ \\ &+k_4x_4+k_3x_3-,\dots,-x_n^3+3x_nx_{n-1}^2-k_{n-1,n}\left(x_n^2+x_{n-1}^2\right)+k_nx_n+k_{n-1}x_{n-1} \end{aligned} \tag{2}$$

Система (1) в развернутом виде записывается:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=x_3 \\ \dots=\dots \\ \dot{x}_{n-1}=x_n \\ \dot{x}_n=b_n\left[3x_2x_1^2-x_2^3-k_{12}\left(x_1^2+x_2^2\right)+\left(k_1-a_n\right)x_1+\left(k_2-a_{n-1}\right)x_2+3x_4x_3^2-\right. \\ -x_4^3-k_{34}\left(x_3^2+x_4^2\right)+\left(k_3-a_{n-2}\right)x_3+\left(k_4-a_{n-3}\right)x_4+,\dots,+3x_nx_{n-1}^2- \\ \left.-x_n^3-k_{n-1,n}\left(x_n^2+x_{n-1}^2\right)+\left(k_{n-1}-a_2\right)x_{n-1}+\left(k_n-a_1\right)x_n\right] \end{cases} \tag{3}$$

Находим стационарные состояния системы:

$$x_{1s}=0,\ x_{2s}=0,\dots,\ x_{n-1,s}=0,\ x_{ns}=0, \tag{4}$$

$$x_{is}=\frac{k_i-a_{n-i+1}}{k_{i,i+1}},x_{js}=0 \text{ при } i\neq j, i=1,...,n \quad (5)$$

$$x_{i+1,s}^2=\frac{-k_{i,i+1}-\sqrt{k_{i,i+1}^2+4\left(k_i-\mathrm{a}_{\text{n-i+2}}\right)}}{2},x_{js}=0 \text{ для } j\neq i+1; i=1,...,n \quad (6)$$

$$x_{i+1,s}^3=\frac{-k_{i,i+1}+\sqrt{k_{i,i+1}^2+4\left(k_i-\mathrm{a}_{\text{n-i+2}}\right)}}{2},x_{js}=0 \text{ для } j\neq i+1; i=1,...,n \quad (7)$$

Устойчивости стационарных состояний (4), (5), (6) и (7) системы (3) будем исследовать на основе предложенного подхода методом функции Ляпунова [5]. Рассмотрим устойчивость стационарного состояния (4). Полная производная по времени от вектор-функции Ляпунова будет равна [6]:

$$\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}*\frac{dX}{dt}=-x_2^2-x_3^2-,...,-x_n^2-b_n^2\left[k_{12}x_1^2-3x_2x_1^2-(k_1-a_n)x_1\right]^2-\\
&-b_n^2\left[x_2^3+k_{12}x_2^2-(k_2-a_{n-1})x_2\right]^2-b_n^2\left[k_{34}x_3^2-3x_4x_3^2-(k_3-a_{n-2})x_3\right]^2-\\
&-b_n^2\left[k_{34}x_4^2+x_4^3-(k_4-a_{n-3})x_4\right]^2-,...,-\\
&-b_n^2\left[k_{n-1,n}x_{n-1}^2-3x_nx_{n-1}^2-(k_{n-1}-a_2)x_{n-1}\right]^2-b_n^2\left[x_n^3+k_{n-1,n}x_n^2-(k_n-a_1)x_n\right]^2
\end{aligned} \quad (8)$$

Из (9) получаем, что полная производная по времени от вектор-функции Ляпунова будет знакоотрицательной функцией, следовательно достаточное условие асимптотической устойчивости системы (3) относительно стационарного состояния (5) выполняется. По лемме Морса функцию Ляпунова (8) локально в окрестности стационарного состояния можем представить в виде квадратичной формы:

$$\begin{aligned}
&V(x)=-b_n(k_1-a_n)x_1^2-b_n\left(k_2-a_{n-1}+\frac{1}{b_n}\right)x_2^2-b_n\left(k_3-a_{n-2}+\frac{1}{b_n}\right)x_3^2-\\
&-b_n\left(k_4-a_{n-3}+\frac{1}{b_n}\right)x_4^2-,\dots,-b_n\left(k_{n-1}-a_2+\frac{1}{b_n}\right)x_{n-1}^2-b_n\left(k_n-a_1+\frac{1}{b_n}\right)x_n^2
\end{aligned} \quad (9)$$

Необходимое условие устойчивости стационарного состояния (4) будет определяться системой неравенств при $b_n>0$:

$$\begin{cases} k_1 - a_n < 0, k_2 - a_{n-1} + \dfrac{1}{b_n} < 0, k_3 - a_{n-2} + \dfrac{1}{b_n} < 0, k_4 - a_{n-3} + \dfrac{1}{b_n} < 0, \ldots \\ \ldots, k_{n-1} - a_2 + \dfrac{1}{b_n} < 0, k_n - a_1 + \dfrac{1}{b_n} < 0 \end{cases} \tag{10}$$

Исследуем на робастную устойчивость стационарного состояния (5) на основе метода функции Ляпунова.

Полная производная по времени от вектор-функции Ляпунова будет знакоотрицательной, следовательно, достаточное условие асимптотической устойчивости состояния (5) будет всегда выполняться.

Функцию Ляпунова в скалярной форме получим:

$$\begin{aligned} V(x) = &-b_n x_2 x_1^3 + \frac{1}{3} b_n k_{12} x_1^3 - 3b_n (k_1 - a_n) x_2 x_1^2 + \frac{1}{2} b_n (k_1 - a_n) x_1^2 + \\ &+ \frac{1}{4} b_n x_2^4 + \frac{1}{3} b_n k_{12} x_2^3 - 3b_n (k_1 - a_n) x_1 x_2^2 + \frac{1}{2} b_n (k_2 - a_{n-1}) x_2^2 -, \ldots, - \\ &- b_n x_n x_{n-1}^3 + b_n k_{n-1,n} x_{n-1}^3 - 3b_n (k_n - a_1) x_n x_{n-1}^2 + \frac{1}{2} b_n (k_{n-1} - a_2) x_{n-1}^2 + \\ &+ \frac{1}{4} b_n x_n^4 + \frac{1}{3} b_n k_{n,n-1} x_n^3 - 3b_n (k_n - a_1) x_{n-1} x_n^2 - \frac{1}{2} b_n (k_n - a_1) x_n^2 - \\ &- \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{2} x_3^2 -, \ldots, - \frac{1}{2} x_n^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Условия положительной или отрицательной определенности функции (11) определить невозможно, поэтому воспользуемся леммой Морса и локально можно в окрестности точки стационарного состояния функцию (11) представить в виде квадратичной формы:

$$\begin{aligned} V(x) \approx \frac{b_n}{2} \Bigg[&(k_1 - a_n) x_1^2 + \left(k_2 - a_{n-1} - \frac{1}{b_n} \right) x_2^2 + \left(k_3 - a_{n-2} - \frac{1}{b_n} \right) x_3^2 + \\ &+ \left(k_4 - a_{n-3} - \frac{1}{b_n} \right) x_4^2 +, \ldots, + \left(k_n - a_1 - \frac{1}{b_n} \right) \Bigg] \end{aligned} \tag{12}$$

Необходимое условие устойчивости стационарного состояния (5) будет определяться системой неравенств при $b_n > 0$:

$$\begin{cases} k_1 - a_n > 0, k_2 - a_{n-1} - \dfrac{1}{b_n} > 0, k_3 - a_{n-2} - \dfrac{1}{b_n} > 0, k_4 - a_{n-3} - \dfrac{1}{b_n} > 0, \dots \\ \dots, k_{n-1} - a_2 - \dfrac{1}{b_n} > 0, k_n - a_1 - \dfrac{1}{b_n} > 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Из системы неравенств (10) и (13) очевидно, что система управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости обеспечивает устойчивость системе (3) при любых изменениях неопределенных параметров.

Список использованных источников

1. Бесекерский В.А., Небылов А.В. Робастные системы автоматического управления. М.: Наука, 1983. 239 с.
2. Glover J. Robust stabilization of linear multivariable system: relation to approximation // Int. J. Control. 1986. V. 43. № 3. P. 741-766.
3. Бейсенби М.А., Ускенбаева Г.А. Метод функции А.М.Ляпунова в исследовании робастной устойчивости линейных систем управления с одним входом и одним выходом // Информационные и телекоммуникационные технологии: Образование, наука, практика. Тр. междунар. науч.-практ. конф. Алматы. С. 274-277.
4. Beisenbi M.A., Abdrakhmanova L.G. Research of dynamic properties of parameter structurally stable maps by Lyapunov function // Int. Conference on Computer, Network and Communication Engineering (ICCNCE 2013). 2013. P. 201-203.
5. Dorato P., Vedavalli Recent Advances in Robust Control. N.Y., 1990
6. Beisenbi M., Yermekbayeva J. The Research of the Robust Stability in Linear System // Int. Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT'13), Sousse, Tunisia, 2013. Proceedings of IPCO. P. 142-147.
7. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1984.