

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

Кассин Дмитрий Владленович

студент
Московский авиационный институт
Москва

Аннотация. В данной статье рассмотрены проблемы моделирования двумерного течения. Сформулирована постановка задачи двумерного вихревого течения. Подробно описан алгоритм решения поставленной задачи с помощью замены переменных и последующего преобразования уравнения Навье-Стокса к более удобному виду. Полностью описан последующий переход с помощью численного метода конечных разностей к компьютерной реализации. Приведены результаты безразмерных вычислений.

Ключевые слова: математическое моделирование, вихревое течение, уравнение Навье-Стокса, течение без трения, программная реализация, уравнение переноса вихрей, численные методы, метод конечных разностей.

Постановка задачи:

Пусть есть двумерная прямоугольная полость полностью заполненная вязкой несжимаемой жидкостью. Внутри полости находится неподвижный, непроницаемый объект (прямоугольник). Сверху полости находится непроницаемая пластина, которая движется с постоянной скоростью \bar{v}_1 . Снизу полости находится непроницаемая пластина, которая движется с скоростью \bar{v}_2 . Исследуем изменение поля скоростей в зависимости от разных значений \bar{v}_1 и $\bar{v}_2 \cdot \tau$

Решение:

Классическое уравнение Навье-Стокса в переменных скорости и давления выглядит следующим образом:

В общем виде:

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{u} \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

В двухмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial y} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right|_{x=x_n} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

где P – давление среды; ρ – плотность среды; \vec{u} – вектор скорости; ν – кинематическая вязкость; \vec{F} – ускорение макрочастиц среды, вызванное обменом количеством движения с соседними макрочастицами.

Введем переменные функция тока, вихрь. Если ограничиться двумерным случаем, то можно ввести следующие определения функции тока (3) и вихря (4).

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ u_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

$$\omega = \operatorname{rot}(\mathbf{u}) = \omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (4)$$

Тогда уравнение Навье-Стокса в переменных функции тока, вихря принимает такой вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \end{cases} \quad (5)$$

На твердых и неподвижных поверхностях граничные условия задаются следующим образом: $u|_{\Gamma_1} = 0$; $u|_{\Gamma_2} = 0$; $\Psi|_{\Gamma} = 0$; $\omega|_{\Gamma} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2}|_{\Gamma}$, где n – нормаль к границе Γ .

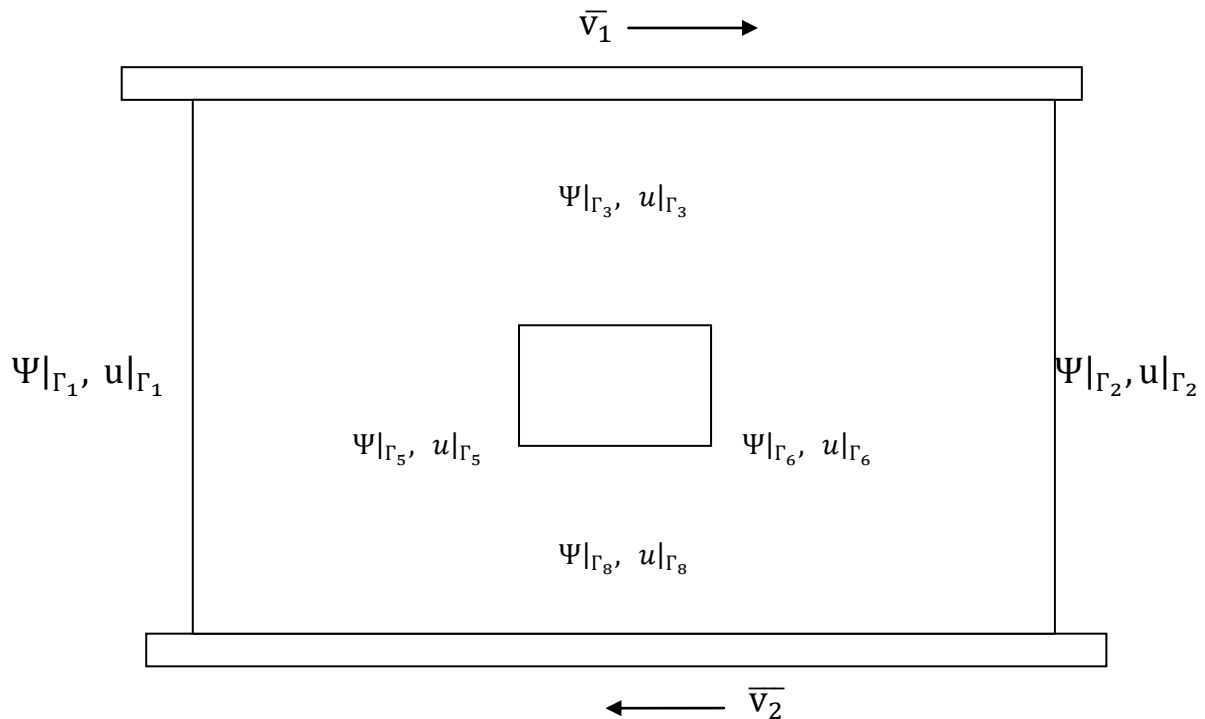


Рис. 1. Графическое изображение поставленной задачи

Границы полости: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$. Границы препятствия (прямоугольника), напротив соответствующих границ полости: $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$.

Таким образом, общий алгоритм решения выглядит следующим образом:

- 1) При $t = 0$ задаем граничные условия для полей скорости функции тока.
- 2) Чтобы начальные значения были оптимальными, находим поле функции тока путем решения уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$.
- 3) Обновляем граничные условия для вихря.
- 4) Находим новое поле скоростей \bar{u}^{t+1}
- 5) Решаем уравнения Навье-Стокса $\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$ для вихря ω^{t+1} .

6) Используя полученные значения ω^{t+1} решаем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \text{ для функции тока } \Psi^{t+1}.$$

7) Повторяем все начиная с шага 3, пока не наступит время установления равновесия.

Программная реализация.

В программной реализации использовался численный метод конечных разностей.

Для выполнения поставленного алгоритма и решения поставленной задачи необходимо представить вычисляемые переменные с помощью конечно-разностной схемы.

Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\alpha = \alpha_t \times \alpha_x \times \alpha_y$:

$$\alpha_t = \{t^n = nh_t, 0 \leq n \leq N_t - 1, l_t = h_t (N_t - 1)\}$$

$$\alpha_x = \{x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x - 1, l_x = h_x (N_x - 1)\}$$

$$\alpha_y = \{y_j = jh_y, 0 \leq j \leq N_y - 1, l_y = h_y (N_y - 1)\}$$

n, i, j – индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

h_t, h_x, h_y – шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

N_t, N_x, N_y – количество узлов по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

l_t, l_x, l_y – длина расчетной области временной координате пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

Рассмотрим вычисляемые переменные подробнее. Пусть $h = h_x = h_y$

1) Функция тока Ψ из второго пункта алгоритма, исходя из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \text{ выглядит следующим образом:}$$

$$\Psi(x, y) = \frac{\Psi(x + h, y) + \Psi(x - h, y) + \Psi(x, y + h) + \Psi(x, y - h)}{4}$$

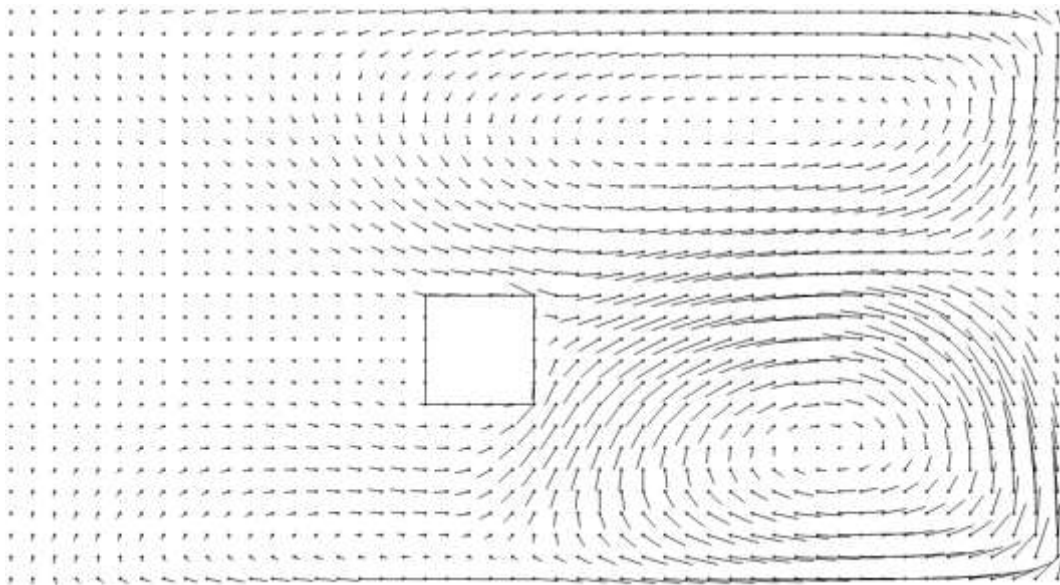
- 2) Функция тока Ψ^{t+1} из пятого пункта алгоритма, исходя из уравнений Навье-Стокса $\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi(t+1, x, y) &= \\ &= \frac{\Psi(x+h, y) + \Psi(x-h, y) + \Psi(x, y+h) + \Psi(x, y-h) - \omega(t, x, y)h^2}{4} \end{aligned}$$

- 3) Вихрь ω^{t+1} из шестого пункта алгоритма, исходя из уравнения Пуассона $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(t+1, x, y) &= \\ &= \frac{\omega(x, y) + (p(x, y+h) - p(x, y-1))(\omega(x+h, y) - \omega(x-h, y))h_t}{4h} \\ &+ \frac{p(x-h, y)(\omega(x, y+h) - \omega(x, y-h))h_t}{4h} \\ &+ \frac{2(\omega(x-h, y) - 4\omega(x, y) + \omega(x+h, y) + \omega(x, y-h) + \omega(x, y+h))}{h^2 h_t} \end{aligned}$$

Результаты вычислений.



**Рис. 3. Поле скоростей при $\bar{v}_1 = 10$ и $\bar{v}_2 = 10$,
Все границы непроницаемы. Объект в положении 1**

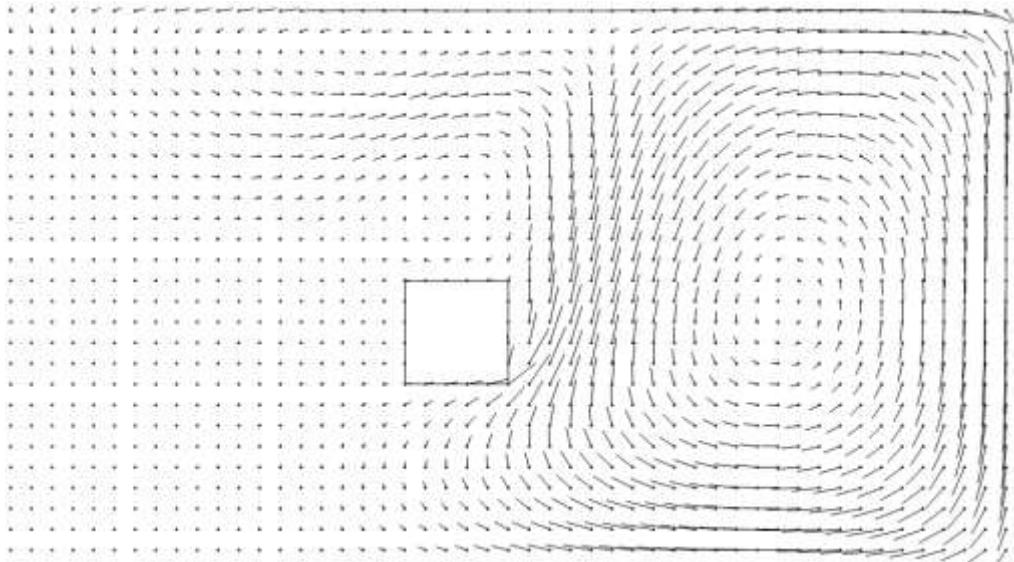


Рис. 4. Поле скоростей при постоянном ускорении верхней стенки
 $\overline{w}_1 = const, \overline{v}_1(0) = 0, \overline{v}_1(end) = 15$ и $\overline{v}_2 = 0,$
Все границы непроницаемы

Список использованных источников

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.
3. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса. 1981.
4. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2004.