МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Нурпеисов Куаныш Сайлаубаевич
магистр
Окпебаева Гулнур Шерниязовна
магистр
Жетисуский государственный университет им И. Жансугурова
Талдыкорган (Казахстан)

Аннотация. Представлены основные тригонометрические формулы и основные подстановки. Изложены методы интегрирования тригонометрических функций, произведение степенных функций от $Sinx$ и $Cosx$. Затронуты нестандартные методы.

Ключевые слова: метод, интеграл, тригонометрия, функция.

THE METHODS OF INTEGRATION TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

Nurpeisov Kuanysh Sailaubayevich
master
Okpebayeva Gulnur Sherniyazovna
master
I. Zhansugurov Zhetysu State University
Taldykorgan (Kazakhstan)

Abstract. The main trigonometric formulas and basic permutations are presented. The methods of integration trigonometric functions are described, the composion of power functions of the $Sinx$ and $Cosx$. Affected non-standard methods.

Keywords: method, integral, trigonometry, function.

Все тригонометрические функции выражаются рационально через синус и косинус функции. Если любая тригонометрические функция рационально зависима, то функция зависит только от синуса и косинуса.

Сперва рассмотрим интегралы вида

$$\int Sin^m xCos^n xdx \qquad (A)$$

где m и n – целые числа.

Для того, чтобы найти интеграл (A) один из показателей m или n должен быть нечетным положительным числом. Если n – нечетное положительное число, то применяют подстановку $Sinx = t$, если m – нечетное положительное число,то применяют подстановку $Cosx = t$

Пример

$$\int Sin^2 xCos^3 xdx$$

Решение

Полагая $Sinx = t$, $Cosxdx = dt$, получаем:

$$\int Sin^2 xCos^3 xdx = \int Sin^2 xCos^2 xCosxdx = \int Sin^2 x(1 - Sin^2 x)Cosxdx = \int t^2 (1 - t^2)dt =$$

$$= \int \left(t^2 - t^4\right)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{Sin^3 x}{3} - \frac{Sin^5 x}{5} + C$$

Пример

Полагая $Cosx = t$, $-Sinxdx = dt$, получаем:

$$\int \frac{Sin^3 x}{Cos^6 x}dx = \int \frac{(1 - Cos^2 x)Sinxdx}{Cos^6 x} = \int \frac{(1 - t^2)(-dt)}{t^6} = -\int \frac{dt}{t^6} + \int \frac{dt}{t^4} = -\int t^{-6}dt + \int t^{-4}dt =$$

$$\frac{1}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{5Cos^6 x} - \frac{1}{3Cos^2 x} + C$$

Если оба показатели степени m и n – четное положительное число, то для преобразования достаточно применение следующих формул:

$$Sin^2 x = \frac{1 - Cos2x}{2} \qquad Cos^2 x = \frac{1 + Cos2x}{2}$$

$$SinxCosx = \frac{1}{2}Sin2x$$

Пример

$$\int Cos^4 xdx$$

Решение

$$\int Cos^4 xdx = \int (Cos^2 x)^2 dx = \int \frac{(1+Cos2x)^2}{2^2}dx = \frac{1}{4}\int (1+2Cos2x + Cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx +$$
$$+\frac{1}{4}\int \frac{1+Cos4x}{2}dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}Sin2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}Sin4x + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}Sin2x + \frac{1}{32}Sin4x + C$$

Если один из показателей m или n – четное отрицательное число, то воспользуемся подстановкой: $tgx = t$, $Ctgx = t$.

Пример

$$\int \frac{Sin^2 xdx}{Cos^6 x} = \int tg^2 x \frac{1}{Cos^2 x}\frac{1}{Cos^2 x}dx = \int tg^2 x(1+tg^2 x)d(tgx) = \int (tg^2 x + tg^4 x)d(tgx) =$$
$$= \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C$$

Расмотрим интегралы вида

$$\int SinmxCosnxdx; \int SinmxSinnxdx; \quad \int CosmxCosnx\,dx$$

Тригонометрические формулы

$$SinmxCosnx = \frac{1}{2}\left[Sin(m-n)x + Sin(m+n)x\right]$$

$$SinmxSinnx = \frac{1}{2}\left[Cos(m-n)x - Cos(m+n)x\right]$$

$$CosmxCosnx = \frac{1}{2}\left[Cosn(m-n)x + Cos(m+n)x\right].$$

дают возможность произведения тригонометрических функций представить в виде суммы.

Пример

$$\int Sin5xCos3xdx = \frac{1}{2}\left[Sin(5-3)x + Sin(5+3)x\right]dx = \frac{1}{2}\int Sin2xdx + \frac{1}{2}\int Sin8xdx =$$
$$= -\frac{Cos2x}{4} - \frac{Cos8x}{16} + C$$

Интегралы вида $\int R(Sinx, Cosx)dx$, где $R(Sinx, Cosx)$ – рациональная функция. Интегралы указанного вида приводят к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2} = t$.

В результате имеем :

$$Sinx = \frac{2t}{1+t^2} \quad Cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$Sinx = \frac{2Sin\frac{x}{2}Cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2Cos\frac{x}{2}Sin\frac{x}{2}}{Cos^2\frac{x}{2} + Sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$Cosx = \frac{Cos^2\frac{x}{2} - Sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{Cos^2\frac{x}{2} - Sin^2\frac{x}{2}}{Cos^2\frac{x}{2} + Sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tg\frac{x}{2} = t; \frac{x}{2} = arctgt, x = 2arctgt; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример

$$\int \frac{dx}{1+Sinx+Cosx}$$

Решение

$$\int \frac{dx}{1+Sinx+Cosx} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ell n\left|1+t\right| + C = \ell n\left|1+tg\frac{x}{2}\right| + C$$

Список использованных источников

1. Темірғалиев Н.Т. Математикалық анализ. Т. 1. Алматы: Мектеп, 1987. 288 б. Т. 2. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б. Т. 3. Алматы: Білім, 1997. 432 б.
2. Фихтенгольц Г.М. Дифференциалдық және интегралдық есептеулер курсы. Т. 1. Алматы: Мектеп, 1970. 634 б. Т. 2. Алматы: Мектеп, 1971. 664 б.
3. Бохан К.А., Егоров И.А., Лащенов К.В. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Просвещение, 1965. 436 с. Т. 2, 1966. 380 с.
4. Ибрашев Х.И., Еркегулов Ш.Т. Математикалық анализ курсы. Т 1, 2. Алматы, 1963.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. М.: Дрофа. Т. 1. 2003. 704 с. Т. 2. 2004. 720 с. Т. 3. 2006. 351 с.