УДК 534

НОВОЕ УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИОННОЙ МЕМБРАНЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ВДОЛЬ ЕЕ СТОРОН

Кравчук Александр Степанович
д-р физ.-мат. наук
Шейнин Станислав Аронович
канд. физ.-мат. наук
Кравчук Анжелика Ивановна
канд. физ.-мат. наук
Тарасюк Иван Александрович
магистрант
Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)
author@apriori-journal.ru

Аннотация. Задача о малых поперечных колебаниях прямоугольной мембраны является классической задачей уравнений математической физики. Однако во всей известной литературе по данному предмету на мембраны действуют растягивающие силы, а необходимо, чтобы действовали растягивающие напряжения. Исправление этой оплошности позволяет выводить уравнения малых поперечных колебаний прямоугольной мембраны с учетом ее механических и реологических характеристик. Кроме того в рассматриваемой статье получены ортотропные уравнения колебаний однородной прямоугольной мембраны, а также определены ее собственные частоты с учетом механических и реологических характеристик материала мембраны. В случае линейно упругого композиционного материала получено уравнение колебания прямоугольной мембраны, а также ее собственные частоты в зависимости от концентрации компонент. Установлено, что вычисление эффективных характеристик материала мембраны в соответствии с гипотезой Фойгта соответствует решению задачи усреднения для горизонтально слоистой мембраны. Применение гипотезы Рейсса соответствует колебаниям вертикально волокнистой мембраны, а применение методики Кравчука-Тарасюка для сужения «вилки» Рейсса-Фойгта соответствует получению наилучшего приближения эффективных свойств структурно неоднородного композиционного материала мембраны.

Ключевые слова: композиционный материал; приближение Кравчука-Тарасюка эффективных свойств материала; малые поперечные колебания; концентрации компонент; линейно упругий материал; квазиупругий однородно стареющий материал.

NEW EQUATION OF SMALL TRANSVERSE OSCILLATIONS OF A RECTANGULAR COMPOSITE MEMBRANE STRETCHED ALONG ITS SIDES

Kravchuk Alexander Stepanovich
doctor of physical and mathematical sciences
Scheinin Stanislav Aronovich
candidate of physical and mathematical sciences
Kravchuk Anzhelica Ivanovna
candidate of physical and mathematical sciences
Tarasyuk Ivan Alexandrovich
undergraduate
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. The derivation of the classical equation of oscillations of a rectangular membrane in literature has a mistake – the tensile stresses should act on the membrane element but not the tensile forces. The correction of this mistake allows obtaining the equation of small transverse oscillation of a rectangular membrane with taking into account its mechanical and rheological properties. The orthotropic oscillation equation was obtained for homogeneous rectangular membrane and defined its Eigen frequencies taking into account mechanical and rheological properties of its material. The equation of oscillations of a rectangular membrane was obtained in the case of linear elastic composite material. In addition Eigen frequencies of composite membrane were hold. It depends on component concentrations of component in composite material. It was found that the calculation of the effective characteristics of the membrane material in accordance with the Voigt hypothesis corresponds to the solution of the problem of averaging for horizontally layered membrane. The application of Reuss hypothesis corresponds to oscillations of vertically fibrous membrane, and the application of the Kravchuk-Tarasyuk method to narrowing of the Reuss-Voigt «range» corresponds to obtaining the best approximation of the effective properties of structurally inhomogeneous composite membrane.

Key words: the composite material; Kravchuk-Tarasyuk approximation of effective material properties; small transverse oscillations; component concentrations; linearly elastic material; uniformly aging quasi-elastic material.

Введение. При выводе классического уравнения колебания прямоугольной мембраны допущен ряд ошибок, которые кочуют из монографии в монографию и уже превратились в классические передаваемые из поколения в поколения заблуждения [1; 2]. Во-первых, на мембрану действуют не постоянные растягивающие силы, а постоянные напряжения. Во-вторых, в рамках предположения об упругой деформации мембраны нет никакой необходимости предполагать, что напряжения растяжения мембраны, действующие на площадках перпендикулярным координатным осям, одинаковы по величине [1; 2].

Уравнение колебания мембраны обобщено на случай разных коэффициентов при разных частных производных, т.е. получено ортотропное волновое уравнение. Кроме того, замена действующих на прямоугольный элемент мембраны сил на напряжения позволяет перейти к рассмотрению уравнений состояния материала не только однородной, но и композиционной мембраны.

Вывод откорректированного уравнения колебания однородной прямоугольной мембраны при действии постоянных растягивающих напряжений. Будем придерживаться плана вывода уравнения близкого к изложенному в [1], с исправлением допущенных там ошибок. Говоря о мембране, мы подразумеваем упругую свободно изгибающуюся натянутую пленку. Пусть в состоянии покоя мембрана занимает некоторую прямоугольную область $D = \{(x,y) | 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$ в плоскости $x0y$, а затем, будучи выведеной из этого состояния, начинает колебаться так, что все ее точки движутся вдоль оси $0z$. Перемещение каждой точки мембраны в момент времени t обозначается $u(x,y,t)$ [1].

При выводе уравнения будем рассматривать внутренний квадратный элемент мембраны, соответствующий интервалам (x_1, x_2) и (y_1, y_2) на осях $0x$ и $0y$ соответственно (рис. 1, 2), причем $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$. Зафиксируем произвольное время t. Будем считать, что мембрана имеет постоянную толщину h и, соответственно, площади сечений S_h квадратных элементов, поперечных направлениям $0x$ и $0y$, равны и определяются уравнением $S_h = h \cdot (x_2 - x_1) = h \cdot (y_2 - y_1)$. Вычислим площадь мембраны $S_D(t)$ в фиксированное время t [1; 2]:

$$S_D(t) = \int_0^b \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dxdy \, . \qquad (1)$$

Из (1) очевидно, что площадь мембраны не изменяется во времени только тогда, когда выполнены приблизительные неравенства $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << 1$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 << 1$, свидетельствующее, что рассматриваются малые колебания мембраны.

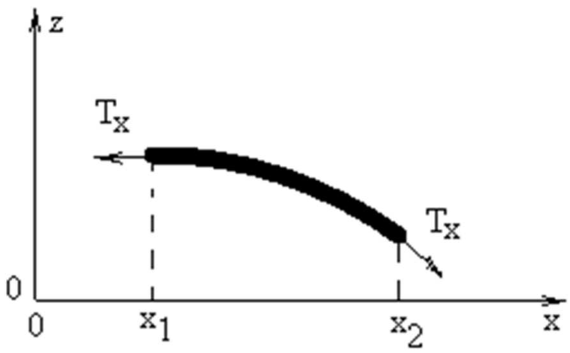

Рис. 1. Сечение вертикального движения квадратного элемента мембраны, соответствующего интервалу (x_1, x_2), с действующими на концах силами, заменяющими отброшенные части мембраны

Отметим, что если α – угол между касательной плоскостью к поверхности $u(x,y,t)$ и осью $0x$, а β – угол между касательной плоскостью к поверхности $u(x,y,t)$ и осью $0y$, то $tg(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}$ и $tg(\beta) = \frac{\partial u}{\partial y}$. Очевидно, обращая полученные уравнения для определения углов α и β и учитывая гипотезу о малости $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, можно получить приблизительные равенства $\alpha \approx \dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\beta \approx \dfrac{\partial u}{\partial y}$ [3]. Рассуждая аналогично при принятых предположениях, можно также получить, что $\cos(\alpha) \approx 1$, $\sin(\alpha) \approx \dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\cos(\beta) \approx 1$, $\sin(\beta) \approx \dfrac{\partial u}{\partial y}$ [3].

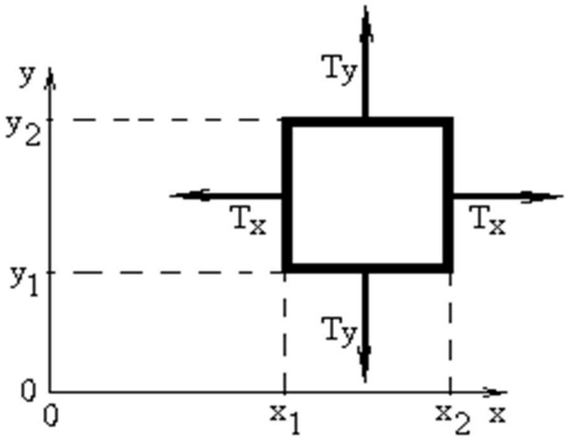

Рис. 2. Вид сверху элемента мембраны под действием растягивающих сил

Пусть σ_x и σ_y – постоянные напряжения натяжения мембраны, действующие на площадках, перпендикулярных осям $0x$ и $0y$ соответственно, на границах выделенного элемента, соответствующего отрезкам (x_1, x_2) и (y_1, y_2) (рис. 2). Тогда, величины интегральных сил, действующих в плоскости $x0z$ в направлении осей $0x$ и $0y$, приложенных к каждой из сторон рассматриваемого элемента, определяются выражением $T_x = (x_2 - x_1) \cdot h \cdot \sigma_x$ и $T_y = (y_2 - y_1) \cdot h \cdot \sigma_y$. Вертикальная сила, действующая на элемент мембраны, равна:

$$T_x \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - T_x \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} + T_y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=y_2} - T_y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=y_1}. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) значения T_x и T_y, действующие на границах квадратного элемента, получаем:

$$T_x \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - T_x \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} + T_y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=y_2} - T_y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=y_1} =$$

$$= S_h \cdot \sigma_x \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} \right) + S_h \cdot \sigma_y \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=y_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=y_1} \right) =$$

$$= S_h \cdot \left(\sigma_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \sigma_y \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right) \approx \tag{3}$$

$$\approx S_h \cdot \left(\frac{\sigma_x}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dxdy + \frac{\sigma_y}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right) =$$

$$= h \cdot \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\sigma_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy.$$

Выражение (3) существенно отличается от результатов, полученных в известных монографиях [1; 2].

Отрицательный знак появляется в сумме сил (3) из-за того, что силы в точках x_1 и y_1 направлены противоположно направлению соответствующих касательных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ (рис. 1).

Пусть ρ – плотность материала мембраны. Тогда вертикальная инерционная составляющая рассматриваемого элемента мембраны (рис. 1, 2) определяется формулой:

$$h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dxdy, \tag{4}$$

Исходя из баланса действующих на элемент мембраны сил, получаем из (2)-(4):

$$h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dxdy = h \cdot \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\sigma_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy. \tag{5}$$

Уравнение (5) можно переписать в виде:

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sigma_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sigma_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=0. \qquad (6)$$

Если считать, что элемент мембраны $(x_1,x_2)\times(y_1,y_2)$ настолько мал по сравнению с длинной волны, что в соответствии с определением интеграла выполнено приближенное равенство [3]:

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sigma_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sigma_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy\approx$$
$$\approx\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sigma_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sigma_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{x=x_0,y=y_0}\cdot(x_2-x_1)\times(y_2-y_1), \qquad (7)$$

где $(x_0,y_0)\in(x_1,x_2)\times(y_1,y_2)$ – некоторая точка, то из (7) будет следовать обобщенное локальное уравнение колебания прямоугольной мембраны под действием постоянных разных по величине растягивающих напряжений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_x{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_y{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (8)$$

где $a_x{}^2=\dfrac{\sigma_x}{\rho}$, $a_y{}^2=\dfrac{\sigma_y}{\rho}$.

Также можно утверждать, что обобщенное ортотропное волновое уравнение в трехмерном случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_x{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_y{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_z{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Решения уравнения свободного колебания прямоугольной мембраны с закрепленными краями. Применим к уравнению (8) метод разделения переменных. Будем предполагать, что решение (8) с принятыми начальными и краевыми условиями имеет вид:

$$u(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(x)\cdot Y_i(y)\cdot\Theta_i(t), \tag{9}$$

где $u_i(x,y,t)=X_i(x)\cdot Y_i(y)\cdot\Theta_i(t)$ – функции для каждого $i=\overline{1,\infty}$, удовлетворяющие уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=a_x{}^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+a_y{}^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}. \tag{10}$$

Подставляя $u_i(x,y,t)$ в (10), получаем:

$$\frac{\dfrac{d^2\Theta_{x,i}(t)}{dt^2}}{\Theta_i(t)}=a_x{}^2\frac{\dfrac{d^2X_i(x)}{dx^2}}{X_i(x)}+a_y{}^2\frac{\dfrac{d^2Y_i(y)}{dy^2}}{Y_i(y)}. \tag{11}$$

Очевидно, что (11) возможно только тогда, когда для любого i обе части уравнений равны некоторым константам [1]. Поскольку $\dfrac{d^2X_i(x)}{dx^2}\Big/X_i(x)$ зависит только от x, а $\dfrac{d^2Y_i(y)}{dy^2}\Big/Y_i(y)$ только от y, то их сумма или разность могут быть постоянными в (11), если данные выражения сами являются константами, т.е.:

$$\frac{\dfrac{d^2X_i(x)}{dx^2}}{X_i(x)}=-\lambda_{x,i}{}^2, \qquad \frac{\dfrac{d^2Y_i(y)}{dy^2}}{Y_i(y)}=-\lambda_{y,i}{}^2, \tag{12}$$

где $\lambda_{x,i}$, $\lambda_{y,i}$ – некоторые вещественные константы.

Таким образом, из (11) и (12) получаем систему уравнений для определения $X_i(x)$ и $Y_i(y)$:

$$\frac{d^2X_i(x)}{dx^2}+\lambda_{x,i}{}^2\cdot X_i(x)=0, \qquad \frac{d^2Y_i(y)}{dy^2}+\lambda_{y,i}{}^2\cdot Y_i(y)=0. \tag{13}$$

В этом случае решениями уравнений (13) являются функции [1]:

$$X_i(x)=C_{1,i}^x\cos(\lambda_{x,i}\cdot x)+C_{2,i}^x\sin(\lambda_{x,i}\cdot x), \tag{14}$$

$$Y_i(y)=C_{1,i}^y\cos(\lambda_{y,i}\cdot y)+C_{2,i}^y\sin(\lambda_{y,i}\cdot y). \tag{15}$$

Исходя из условия неподвижности краев прямоугольной мембраны, получаем $u\big|_{x=0\wedge x=a,0\le y\le b}=0$ и $u\big|_{y=0\wedge y=b,0\le x\le a}=0$. Тогда из (14) и (15) следует, что для этого достаточно, выполнения условий $C_{1,i}^{x}=0$, $C_{2,i}^{x}\sin(\lambda_{x,i}\cdot a)=0$ и $C_{1,i}^{y}=0$, $C_{2,i}^{y}\sin(\lambda_{y,i}\cdot b)=0$. Последние равенства возможны для произвольных отличных от нуля констант $\lambda_{x,i}$, и $\lambda_{y,i}$ только в случае, когда $\forall i$ $(i=\overline{1,\infty})$ $\sin(\lambda_{x,i}\cdot a)=0$ и $\sin(\lambda_{y,i}\cdot b)=0$, т.е. $\lambda_{x,i}=\dfrac{i\cdot\pi}{a}$, $\lambda_{y,i}=\dfrac{i\cdot\pi}{b}$.

Далее из (11) получаем уравнение для определения $\Theta_i(t)$:

$$\frac{d^2\Theta_i(t)}{dt^2}+\left(a_x{}^2\cdot\lambda_{x,i}{}^2+a_y{}^2\cdot\lambda_{y,i}{}^2\right)\cdot\Theta_i(t)=0, \tag{16}$$

В этом случае решением уравнения (16) является функция:

$$\Theta_i(t)=C_{1,i}^{t}\cos(\omega_i\cdot t)+C_{2,i}^{t}\sin(\omega_i\cdot t), \tag{17}$$

где собственная частота колебаний ω_i прямоугольной пластинки определяется выражением:

$$\omega_i=\frac{i\cdot\pi}{ab}\sqrt{b^2a_x{}^2+a^2a_y{}^2}\,. \tag{18}$$

Отметим, что (18) не имеет ничего общего с формулами для вычисления собственных частот прямоугольной мембраны, указанными в известной монографии [1].

Тогда из (9), (14), (15), (17) и (18) получаем:

$$u(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sin\left(\frac{i\cdot\pi}{a}\cdot x\right)\cdot\sin\left(\frac{i\cdot\pi}{b}\cdot y\right)\cdot\left(A_i\cdot\cos(\omega_i\cdot t)+B_i\sin(\omega_i\cdot t)\right), \tag{19}$$

где $A_i=C_{1,i}^{t}\cdot C_{2,i}^{x}\cdot C_{2,i}^{y}$, $B_i=C_{2,i}^{t}\cdot C_{2,i}^{x}\cdot C_{2,i}^{y}$.

Рассмотрим начальные условия решения задачи. Без ограничения общности будем считать, что начальная скорость равна нулю, т.е.

$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, а сама мембрана в начальный момент времени отклонена и занимает положение $u(x,y,t)|_{t=0} = f(x,y)$. При указанных начальных условиях получаем, что $B_i = 0$ ($i = \overline{1,\infty}$), а коэффициенты A_i определяются из разложения $f(x,y)$ в ряд Фурье двух переменных, а именно уравнения:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi}{b} \cdot y\right). \qquad (20)$$

Определение напряжений растяжения σ_x и σ_y по нормальным однородным деформациям ε_x и ε_y прямоугольной мембраны при отсутствии реологических эффектов в ее материале. Пусть увеличение прямоугольной мембраны при ее натягивании составляет Δ_x метров в направлении $0x$ и Δ_y метров в направлении $0y$, тогда соответствующие деформации мембраны составляют $\varepsilon_x = \frac{\Delta_x}{a}$ и $\varepsilon_y = \frac{\Delta_y}{b}$ [4]. Будем предполагать, что ε_x и ε_y – константы внутри растянутой вдоль координатных осей мембраны. Отметим, что деформации сдвига отсутствуют в случае упругого натяжения прямоугольной мембраны вдоль координатных осей. Кроме того, исходя из условия задачи, $\sigma_z = 0$. Это условие в зависимости от уравнений состояния будет приводить к равномерному (одинаковому во всех точках (x,y) мембраны) изменению ее толщины, что никак не скажется на результатах вывода уравнения (8).

Таким образом, в случае упругого изотропного материала однородной мембраны получаем систему уравнений для определения напряжений натяжения σ_x и σ_y по результатам ее линейного растяжения на Δ_x и Δ_y вдоль осей $0x$ и $0y$ [4]:

$$\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y = E\frac{\Delta_x}{a}, \qquad \sigma_y - \nu \cdot \sigma_x = E\frac{\Delta_y}{b}, \qquad (21)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона материала мембраны.

Решением (21) является выражение:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\Delta_x}{a} + \nu \frac{\Delta_y}{b} \right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\Delta_y}{b} + \nu \frac{\Delta_x}{a} \right). \tag{22}$$

Тогда из (19) следует, что собственные частоты прямоугольной мембраны определяются выражением:

$$\omega_i = \frac{i \cdot \pi}{ab} \sqrt{\frac{E}{\rho\left(1-\nu^2\right)} \left(\Delta_x \frac{b^2 + \nu a^2}{a} + \Delta_y \frac{a^2 + \nu b^2}{b} \right)}. \tag{23}$$

Рассмотрим общий случай нелинейных уравнений напряженно-деформированного состояния материла мембраны при выполнении гипотезы отсутствующих в теле деформаций сдвига [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{cp} &= 2G \cdot \Im\left(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}\right), \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= 2G \cdot \Im\left(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}\right), \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= 2G \cdot \Im\left(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

где $\sigma_{cp} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$, $\varepsilon_{cp} = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$, G – модуль сдвига, $\Im(\ )$ – нелинейная монотонно возрастающая функция. Очевидно, что используя подстановки $\sigma_z = 0$ и $\Im = I$, где I – тождественная функция, невозможно получить уравнения (21) для линейного случая, даже если дополнительно предположить, что $\varepsilon_{cp} = 0$ в упруго-пластическом случае [5; 6]. Подчеркнем, что в случае использования гипотезы $\varepsilon_{cp} = 0$ для плоского напряженного состояния, как это делается в ряде работ [5; 6], из (27) получается противоречивая система уравнений для определения ε_z, т.к. с одной стороны $\varepsilon_z = -\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$, а с дугой $\varepsilon_z = \Im^{-1}\left(\dfrac{\sigma_z - \sigma_{cp}}{2G} \right)$, что, очевидно, далеко не одно и то же при произвольном выборе $\Im(\ )$.

Отметим также, что использование нелинейных уравнений типа (24) при решении задачи о растяжении прямоугольной мембраны требует, кроме всего прочего, использования дополнительной гипотезы о суперпозиции напряженных состояний прямоугольной пластины вдоль осей (т.е. их аддитивности) для выполнения уравнений (2) и (3) равновесия квадратного элемента мембраны, что требует дополнительного физического обоснования.

Таким образом, в связи с отсутствием в литературе корректных общих нелинейных уравнений для плоского напряженного состояния растянутой вдоль осей прямоугольной мембраны, ограничимся анализом только упругого напряженного состояния прямоугольной мембраны.

Вычисление собственных частот с учетом реологии однородного материала мембраны. Предполагая, что все реологические процессы в мембране являются квазистатическими, т.е. на них не оказывают влияния массо-инерционные характеристики мембраны, решение задачи ползучести сводится, фактически, к формальной замене нагрузок T_x и T_y на $T_x(t)$ и $T_y(t)$ в (2) и (3), и далее в (3)-(7) σ_x и σ_y на $\sigma_x(t)$ и $\sigma_y(t)$. Соответственно, вместо (8) можно получить уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_x(t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_y(t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{25}$$

где $a_x(t)^2 = \dfrac{\sigma_x(t)}{\rho}$, $a_y(t)^2 = \dfrac{\sigma_y(t)}{\rho}$.

Совершенно аналогично из (9)-(18) получаем уравнение для собственных частот мембраны с учетом релаксации напряжений натяжения мембраны:

$$\omega_i(t) = \frac{i \cdot \pi}{ab} \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(b^2 \sigma_x(t) + a^2 \sigma_y(t)\right)}. \tag{26}$$

Релаксация напряжений натяжения однородного материала мембраны по наследственной теории. Перейдем к анализу вязкого поведения мембраны. Отметим, что система (24) лежит в основе не только описания нелинейных деформаций твердого тела, но также общих уравнений вязкоупругости и вязкоупругопластичности [7; 8]. Соответственно, т.к. выше был установлен факт, что уравнения (24) невозможно применить при плоском напряженном состоянии линейно и нелинейно упруго или упругопластически деформированной прямоугольной пластины, то и в этом случае также невозможно решить для нее задачи и линейно, нелинейно вязкоупругого или вязкоупругопластического состояния.

Однако отметим, что одними из уравнений состояния, доступных для использования при расчете вязкоупругого поведения прямоугольной мембраны, являются наследственные уравнения квазиупругого поведения изотропного материала мембраны с использованием гипотезы Н.Х. Арутюняна о постоянстве коэффициента Пуассона ν. В этом теоретически простом случае уравнения ползучести А.Р. Ржаницына в рамках плоского напряженного состояния однородно стареющей мембраны примут вид [7]:

$$E(t)\cdot\varepsilon_x(t)=L\left[\sigma_x(t)-\nu\cdot\sigma_y(t)\right],\qquad E(t)\cdot\varepsilon_y(t)=L\left[\sigma_y(t)-\nu\cdot\sigma_x(t)\right],\qquad (27)$$

где $L[\sigma(t)]=\sigma(t)+\int\limits_0^t\sigma(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau$ – наследственный оператор ползучести, $E(t)$ – мгновенный модуль упругости однородно стареющего материала. Пусть обратным оператором к $L[\ ]$ из (27) является оператор релаксации $\Xi[f(t)]=f(t)-\int\limits_0^t f(\tau)\cdot R(t,\tau)d\tau$, тогда обращая (27), с учетом того, что $\varepsilon_x(t)=\dfrac{\Delta_x}{a}$ и $\varepsilon_y(t)=\dfrac{\Delta_y}{b}$, получаем:

$$\sigma_x(t)=\frac{1}{1-\nu^2}\cdot\left(\frac{\Delta_x}{a}+\nu\frac{\Delta_y}{b}\right)\cdot\left(E(t)-\int_0^t E(\tau)\cdot R(t,\tau)d\tau\right),$$

$$\sigma_y(t)=\frac{1}{1-\nu^2}\cdot\left(\frac{\Delta_y}{b}+\nu\frac{\Delta_x}{a}\right)\left(E(t)-\int_0^t E(\tau)\cdot R(t,\tau)d\tau\right). \tag{28}$$

Подставляя (28) в (26), можно получить выражение для собственных частот с учетом реологических параметров.

Применение технической теории старения к описанию релаксации напряжений натяжения мембраны в случае упругой деформации. Уравнения по технической теории старения отличаются от уравнений (28) только наличием функции релаксации $\Psi(t)$ [9] с точностью до замены $\Psi(t)=E(t)-\int_0^t E(\tau)\cdot R(t,\tau)d\tau$.

Колебания композиционной мембраны без учета реологии. Рассмотрим композиционный материал, состоящий из n компонент, деформация которых описывается различными модулями упругости E_k и коэффициентами Пуассона ν_k $(k=\overline{1,n})$. Компоненты композиционного материала имеют объемные доли γ_k $(k=\overline{1,n})$.

При выводе уравнения будем рассматривать внутренний квадратный элемент мембраны, соответствующий интервалам (x_1,x_2) и (y_1,y_2) на осях $0x$ и $0y$ соответственно (рис. 1, 2). Причем $x_2-x_1=y_2-y_1$. Зафиксируем произвольное время t. Будем считать, что мембрана имеет постоянную толщину h и, соответственно, площадь сечения S_h квадратного элемента поперечного направлениям $0x$ и $0y$ равна и определяется уравнением $S_h=h\cdot(x_2-x_1)=h\cdot(y_2-y_1)$. Ширина квадратного элемента $x_2-x_1=y_2-y_1$ композиционной прямоугольной мембраны такова, что объемные доли γ'_k $(k=\overline{1,n})$ компонент композиционного материала для выделенного элемента совпадают с концентрациями для всей мембраны целиком γ_k $(k=\overline{1,n})$. Квадрат с минимальным размером стороны ℓ', удовлетворяющий изложенным выше гипотезам по объемным долям, называется макроточкой композиционного материала. Очевидно, что точки x_1, x_2 и y_1, y_2 выбираются из условия $\ell' \le x_2 - x_1$ и $\ell' \le y_2 - y_1$.

Кроме того, очевидно, что средняя плотность $\langle\rho\rangle$ материала рассматриваемого квадратного элемента мембраны определяется выражением:

$$\langle\rho\rangle = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \rho_k\,, \tag{29}$$

где ρ_k – плотность k -ой компоненты композиционного материала.

В соответствии с общей методикой, примененной для решения задачи определения эффективных параметров линейно упругого твердого тела, рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в мембране, т.е. в данном случае рассматривается колебания квадратного элемента мембраны между точками x_1, x_2 и y_1, y_2 [10].

Принцип реализации метода гомогенизации для прямоугольной мембраны заключается в следующем: если армированный материал состоит из N компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование и т.п.), можно использовать гипотезу Фойгта для трехмерного элемента твердого тела о том, что деформации по всему объему композиционного материала элемента твердого тела однородны. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что напряжения по всему объему композиционного материала мембраны в среднем однородны.

Полученные на основании этих гипотез формулы имеют практическую ценность, так как являются соответственно верхней и нижней оценкой истинных модулей композиционного материала [10].

С методической точки зрения необходимо усреднить деформационные характеристики трехмерного твердого тела, а после этого использовать гипотезу о плоском напряженном состоянии мембраны, понимаемую в данном случае «в среднем» по толщине композиционной мембраны. Поскольку сам процесс усреднения в пространственном случае носит довольно громоздкий характер даже для линейно упругого материала, то ограничимся простым цитированием результатов, полученных в работе [11].

Прежде всего, отметим, что с точки зрения механики мембраны можно утверждать, что использование гипотезы Фойгта для материала мембраны эквивалентно рассмотрению горизонтально (продольно) слоистой структуры композиционной мембраны, каждый слой которой имеет постоянные деформации $\varepsilon_x = \frac{\Delta_x}{a}$ и $\varepsilon_y = \frac{\Delta_y}{b}$. Тогда по аналогии с (22) получаем ($\langle \sigma_z \rangle_F = 0$) [11]:

$$\langle \sigma_x \rangle_F = \frac{\langle E \rangle_F}{\left(1 - \langle \nu \rangle_F{}^2\right)} \cdot \left(\frac{\Delta_x}{a} + \langle \nu \rangle_F \frac{\Delta_y}{b} \right),$$

$$\langle \sigma_y \rangle_F = \frac{\langle E \rangle_F}{\left(1 - \langle \nu \rangle_F{}^2\right)} \cdot \left(\frac{\Delta_y}{b} + \langle \nu \rangle_F \frac{\Delta_x}{a} \right), \tag{30}$$

где

$$\langle E \rangle_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i}{1 + \nu_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i}{1 - 2\nu_i} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \right),$$

$$\langle \nu \rangle_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i \cdot \nu_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \right). \tag{31}$$

Кроме того, использование следующей гипотезы Рейсса для материала мембраны эквивалентно рассмотрению вертикально (поперечно) слоистой либо вертикально волокнистой структуры композиционной мембраны (под вертикалью понимается ось $0z$), которая имеет средние по глубине постоянные деформации $\left\langle \varepsilon_x \right\rangle_R = \dfrac{\Delta_x}{a}$ и $\left\langle \varepsilon_y \right\rangle_R = \dfrac{\Delta_y}{b}$. Тогда, аналогично (22), получаем (при $\left\langle \sigma_z \right\rangle_R = 0$) [11]:

$$\left\langle \sigma_x \right\rangle_R = \frac{\left\langle E \right\rangle_R}{\left(1 - \left\langle \nu \right\rangle_R^{\,2}\right)} \cdot \left(\frac{\Delta_x}{a} + \left\langle \nu \right\rangle_R \frac{\Delta_y}{b} \right),$$

$$\left\langle \sigma_y \right\rangle_R = \frac{\left\langle E \right\rangle_R}{\left(1 - \left\langle \nu \right\rangle_R^{\,2}\right)} \cdot \left(\frac{\Delta_y}{b} + \left\langle \nu \right\rangle_R \frac{\Delta_x}{a} \right), \tag{32}$$

где

$$\left\langle E \right\rangle_R = 1 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{E_i} \right), \qquad \left\langle \nu \right\rangle_R = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \nu_i}{E_i} \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{E_i} \right). \tag{33}$$

Совершенно аналогично для структурно неоднородного материала уравнение (22) получаем в приближении Кравчука-Тарасюка [11] эффективных свойств мембраны (при $\left\langle \sigma_z \right\rangle = 0$) с использованием (31) и (33):

$$\left\langle \sigma_x \right\rangle_{K-T} = 2 \cdot \frac{\left(\left\langle E \right\rangle^{\sigma} + \left\langle E \right\rangle^{\varepsilon} \right)}{\left(4 - \left(\left\langle \nu \right\rangle^{\sigma} + \left\langle \nu \right\rangle^{\varepsilon} \right)^2 \right)} \cdot \left(\frac{\Delta_x}{a} + \frac{\left(\left\langle \nu \right\rangle^{\sigma} + \left\langle \nu \right\rangle^{\varepsilon} \right)}{2} \frac{\Delta_y}{b} \right),$$

$$\left\langle \sigma_y \right\rangle_{K-T} = 2 \cdot \frac{\left(\left\langle E \right\rangle^{\sigma} + \left\langle E \right\rangle^{\varepsilon} \right)}{\left(4 - \left(\left\langle \nu \right\rangle^{\sigma} + \left\langle \nu \right\rangle^{\varepsilon} \right)^2 \right)} \cdot \left(\frac{\Delta_y}{b} + \frac{\left(\left\langle \nu \right\rangle^{\sigma} + \left\langle \nu \right\rangle^{\varepsilon} \right)}{2} \frac{\Delta_x}{a} \right), \tag{34}$$

где [11]

$$\left\langle E \right\rangle^{\sigma} = \frac{\left\langle E \right\rangle_F \left\langle E \right\rangle_R \ln\left(\left\langle E \right\rangle_F / \left\langle E \right\rangle_R \right)}{\left\langle E \right\rangle_F - \left\langle E \right\rangle_R},$$

$$\langle \nu \rangle^{\sigma} = \frac{\langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_R - \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_F}{\langle E \rangle_F - \langle E \rangle_R} + \frac{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R \left(\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R \right) \ln\left(\langle E \rangle_F / \langle E \rangle_R \right)}{\left(\langle E \rangle_F - \langle E \rangle_R \right)^2},$$

$$\langle E \rangle^{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\langle E \rangle_F + \langle E \rangle_R \right) +$$

$$+ \frac{\mathrm{H}_F \mathrm{H}_R \left(\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R \right)^2 \left(\mathrm{H}_F^2 - \mathrm{H}_R^2 - 2\mathrm{H}_F \mathrm{H}_R \ln\left(\mathrm{H}_F / \mathrm{H}_R \right) \right)}{\left(\mathrm{H}_F - \mathrm{H}_R \right)^3},$$

$$\langle \nu \rangle^{\varepsilon} = \frac{\mathrm{H}_F \langle \nu \rangle_F - \mathrm{H}_R \langle \nu \rangle_R}{\mathrm{H}_F - \mathrm{H}_R} - \frac{\mathrm{H}_F \mathrm{H}_R \left(\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R \right) \ln\left(\mathrm{H}_F / \mathrm{H}_R \right)}{\left(\mathrm{H}_F - \mathrm{H}_R \right)^2},$$

$$\mathrm{H}_F = \frac{\langle E \rangle_F}{\left(1 + \langle \nu \rangle_F \right)\left(1 - 2\langle \nu \rangle_F \right)}, \quad \mathrm{H}_R = \frac{\langle E \rangle_R}{\left(1 + \langle \nu \rangle_R \right)\left(1 - 2\langle \nu \rangle_R \right)}.$$

Исходя из (18), (30), (32), (34), получаем собственные частоты колебания прямоугольной горизонтально слоистой ω_i^F, вертикально слоистой или волокнистой ω_i^R, а также структурно неоднородной композиционной мембраны ω_i^{K-T} (рис. 3):

$$\omega_i^F = \frac{i \cdot \pi}{ab} \sqrt{\frac{\langle E \rangle_F}{\langle \rho \rangle \left(1 - \langle \nu \rangle_F^2 \right)} \left(\Delta_x \frac{b^2 + \langle \nu \rangle_F a^2}{a} + \Delta_y \frac{a^2 + \langle \nu \rangle_F b^2}{b} \right)}, \tag{35}$$

$$\omega_i^R = \frac{i \cdot \pi}{ab} \sqrt{\frac{\langle E \rangle_R}{\langle \rho \rangle \left(1 - \langle \nu \rangle_R^2 \right)} \left(\Delta_x \frac{b^2 + \langle \nu \rangle_R a^2}{a} + \Delta_y \frac{a^2 + \langle \nu \rangle_R b^2}{b} \right)}, \tag{36}$$

$$\omega_i^{K-T} = \frac{i \cdot \pi}{ab} \sqrt{\frac{\left(\langle E \rangle^{\sigma} + \langle E \rangle^{\varepsilon} \right)}{\langle \rho \rangle \left(4 - \left(\langle \nu \rangle^{\sigma} + \langle \nu \rangle^{\varepsilon} \right)^2 \right)}} \times$$
$$\times \sqrt{\Delta_x \frac{2b^2 + \left(\langle \nu \rangle^{\sigma} + \langle \nu \rangle^{\varepsilon} \right) a^2}{a} + \Delta_y \frac{2a^2 + \left(\langle \nu \rangle^{\sigma} + \langle \nu \rangle^{\varepsilon} \right) b^2}{b}}, \tag{37}$$

где $i = \overline{1, N}$.

Количество N в (35)-(37) достоверно вычисленных собственных частот определяется шириной макроточки ℓ' (т.е. квадрата) композиционного материала мембраны и длиной волны, соответствующей указанной частоте, т.е. должно соблюдаться условие:

$$\min\{a/N, b/N\} >> \ell' .$$

Заключение. При выводе классического уравнения колебания прямоугольной мембраны допущена неточность в известной монографии [1] – на мембраны действуют не растягивающие силы, а растягивающие напряжения, исправление которой позволяет выводить уравнения малых поперечных колебаний прямоугольной мембраны с учетом ее механических и реологических характеристик.

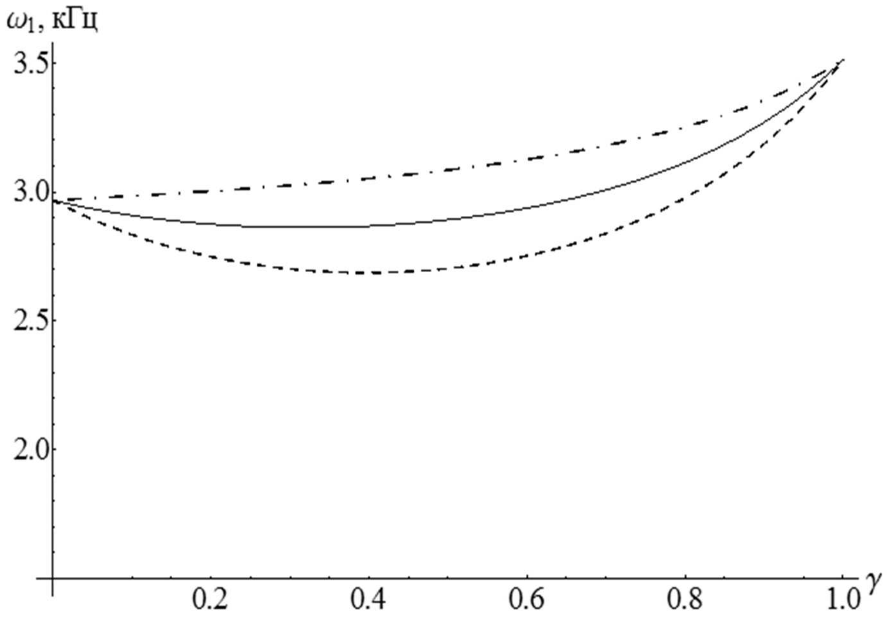

Рис. 3. Зависимость низших собственных частот ω_1^F (35), ω_1^R (36), ω_1^{K-T} (37) поперечных колебаний квадратной композиционной мембраны $a = b = 1м$ при ее натяжении в направлении $0x$ $\Delta_x = 0.01м$ и в направлении $0y$ $\Delta_y = 0.015м$ от концентрации γ первого материала в двухкомпонентной смеси ($E_1 = 7 \cdot 10^{10} Па$, $E_2 = 2 \cdot 10^{11} Па$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\rho_1 = 2000\, кг/м^3$, $\rho_2 = 8000\, кг/м^3$): ω_1^F (штрихпунктирная линия); ω_1^R (пунктирная линия); ω_1^{K-T} (непрерывная линия)

Получены уравнения колебаний однородной прямоугольной мембраны, а также определены ее собственные частоты с учетом механических и реологических характеристик ее однородного материала.

В случае линейно упругого композиционного материала получено уравнение колебания прямоугольной мембраны, а также ее собственные частоты в зависимости от концентрации компонент.

Установлено, что вычисление эффективных характеристик материала мембраны в соответствии с гипотезой Фойгта соответствует решению задачи усреднения для горизонтально слоистой мембраны. Применение гипотезы Рейсса соответствует колебаниям вертикально слоистой или вертикально волокнистой мембраны, а применение методики Кравчука-Тарасюка для сужения «вилки» Рейсса-Фойгта соответствует получению наилучшего приближения эффективных свойств структурно неоднородного композиционного материала мембраны.

Список использованных источников

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.
2. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. Уравнения математической физики. Томск: Изд-во НТЛ, 2002. 646 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М: Наука. 1986. 544 с.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. М.: Госстройиздат, 1957. 256 с.
5. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. Минск: БГУ, 2011. 543 с.
6. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
7. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М: Стройиздат, 1968. 418 с.
8. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
9. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
10. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Из-во Московского университета,1984. 336 с.
11. Тарасюк И.А., Кравчук А.С. Сужение «вилки» Фойгта-Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 3. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf