УДК 539.3

МАЛЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ ПРОГИБЫ ВЕСОМОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНО НАТЯНУТОЙ НИТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Кравчук Александр Степанович
д-р физ.-мат. наук
Кравчук Анжелика Ивановна
канд. физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. Одним из полезных в дидактическом смысле решений одномерных задач механики твердого тела является решение статической задачи определения прогибов предварительно натянутой нити под действием силы тяжести. Рассмотрение данного примера полезно так же с точки зрения уравнений математической физики, т.к. с одной стороны указывает способ исправления вывода уравнения колебания натянутой струны, а с другой демонстрирует пример расчета натяжения весомого провода между двумя точками его неподвижного крепления. Установлено, что поперечные прогибы предварительно натянутой между неподвижными точками нити описываются параболой. Получено уравнение позволяющее определить максимальную величину прогиба нити в зависимости от деформационных и реологических характеристик ее однородного материала.

Ключевые слова: малые поперечные прогибы; линейно упругий материал; наследственное уравнение ползучести однородно стареющего материала.

SMALL TRANSVERSE DEFLECTIONS OF WEIGHT HORIZONTAL SPANNED CORD BY GRAVITY

Kravchuk Alexander Stepanovich
doctor of physical and mathematical sciences
Kravchuk Anzhelica Ivanovna
candidate of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. One useful in didactic sense solutions dimensional problems of solid mechanics is a solution of the problem of determining the static deflections of pre-stretched cord by gravity. The consideration of this example is useful in terms of equations of mathematical physics. Because it indicates a method of correcting of equation of a stretched string vibration, and the other shows an example of calculation of a weighty cord tension between its two fixed attachment points. It was found that the transverse deflections pre-stretched cord between fixed points describes by parabola. An equation allows determining the maximum amount of deflection of cord depending on the deformation and rheological characteristics of its homogeneous material.

Key words: small transverse deflections; linearly elastic material; hereditary creep equation is homogeneous aging of the material.

Введение. Одним из важнейших факторов, определяющих усвоение студентами теоретического материала по механике твердого тела, является количество рассмотренных примеров решения прикладных задач, имеющих понятную для учащихся интерпретацию, связанную с их «технологическим» опытом, приобретенным в повседневной жизни.

Особенную важность приобретают в этом случае решения одномерных задач, которые должны стать основой интуитивно естественного перехода к многомерным обобщениям, таким как тензор напряжений, деформаций и многомерные уравнения состояния.

Одним из таких полезных в дидактическом смысле решений одномерных задач является решение статической задачи определения прогибов предварительно натянутой нити под действием силы тяжести.

Рассмотрение данного примера полезно так же с точки зрения уравнений математической физики [1], т.к. с одной стороны указывает способ исправления вывода уравнения колебания натянутой струны, а с другой демонстрирует пример расчета натяжения весомого провода между двумя точками его неподвижного крепления.

Постановка и решение задачи без учета реологии материала. Пусть в положении равновесия натянутая нить расположена вдоль оси $0x$ и премещение происходит в плоскости $x0y$, причем каждая точка нити смещается лишь параллельно оси $0y$ и это перемещение под действием силы тяжести обозначается $u(x)$. При выводе уравнения будем рассматривать внутренний участок нити, соответствующий интервалу (x_1, x_2) на оси $0x$ [1]. Будем считать, что сечение нити имеет постоянную поперечную площадь S. Вычислим длину участка нити, соответствующего интервалу (x_1, x_2) [1; 2]:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx\,. \qquad (1)$$

Из (1) очевидно, что дина нити соответствующая интервалу (x_1, x_2) имеет длину $x_2 - x_1$ только тогда, когда выполнено приблизительное равенство $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << 1$, свидетельствующее, что рассматриваются малые прогибы нити [1; 2].

Отметим, что если α – угол между касательной к нити и осью $0x$, то $tg(\alpha)=\frac{\partial u}{\partial x}$, $\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}$, $\sin(\alpha)=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}$ и при принятых предположениях $\cos(\alpha)\approx 1$, а $\sin(\alpha)\approx\frac{\partial u}{\partial x}$ [1; 2].

Пусть T – сила натяжения нити, действующая на концах участка (x_1, x_2). Тогда в соответствии с предположениями задачи движение осуществляется только в направлении оси $0y$, т.к. проекции сил натяжения действующих на концах отрезка (x_1, x_2) уравновешивают друг друга (рис. 1) [1].

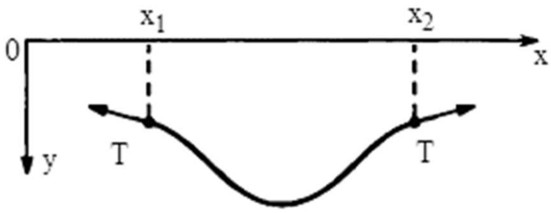

Рис. 1. Вертикальное движение участка нити соответствующего интервалу (x_1, x_2) с действующими на концах силами, заменяющими отброшенные части нити

Вертикальная сила, действующая на участок нити, равна [1; 2]:

$$T\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} - T\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} = \int_{x_1}^{x_2}\left(T\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx. \qquad (2)$$

Отрицательный знак появляется в сумме сил (2) из-за того, что сила в точке x_1 направлена противоположно направлению касательной $\frac{\partial u}{\partial x}$ [1].

Пусть ρ – плотность материала нити на интервале (x_1, x_2), кроме того пусть на каждую компоненту материала композиционной нити действует внешние сила тяжести с ускорением свободного падения g, то к вертикальной силе, действующей на интервале (x_1, x_2) следует добавить силу:

$$\int_{x_1}^{x_2} (g \cdot \rho) dx \cdot S. \tag{3}$$

Исходя из баланса действующих сил, получаем [1]:

$$-\int_{x_1}^{x_2} \left(T \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} g \cdot \rho dx \cdot S \tag{4}$$

Уравнение (4) можно переписать в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sigma_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \cdot \rho \right) dx = 0, \tag{5}$$

где $\sigma_x = \dfrac{T}{S}$ – среднее по поперечному сечению напряжение предварительного натяжения нити.

Если считать, что участок нити (x_1, x_2) настолько мал по сравнению с общей длинной нити, что выполнена формула Лагранжа [2]:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sigma_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \cdot \rho \right) dx \approx \left(\sigma_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \cdot \rho \right) \Bigg|_{x = x_0} \cdot (x_2 - x_1), \tag{6}$$

где $x_0 \in (x_1, x_2)$ – некоторая точка, то из (6) с очевидностью будет следовать общеизвестное локальное уравнение вертикального провисания нити:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{g \cdot \rho}{\sigma_x}, \tag{7}$$

Интегрируя (7) с учетом краевых условий для вертикально неподвижных концов нити $u(0) = u(\ell) = 0$, где ℓ - длина закрепленного по концам участка, получаем [2]:

$$u = \frac{g \cdot \rho}{\sigma_x} x \cdot (\ell - x). \tag{8}$$

Отметим, что при уравнении состояния $\sigma_x = \Im\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)$ [3], где $\Im(\ )$ – некоторая нелинейная функция, $\frac{\Delta\ell}{\ell}$ – относительное укорочение нити при предварительном натяжении на $\Delta\ell$, уравнение провисания нити под действием силы тяжести приобретет вид:

$$u = \frac{g \cdot \rho}{\Im\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)} x \cdot (\ell - x). \tag{9}$$

Например, для линейно-упругого материала нити (9) приобретает вид [3]:

$$u = \frac{g \cdot \rho \cdot \ell}{E \cdot \Delta\ell} x \cdot (\ell - x).$$

Рассмотрим случай ползучести однородного материала. Задача является квазистатической, поэтому зафиксируем произвольное время t и заменив в (2) T на $T(t)$ получаем искомое уравнение аналогичное (7) [4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{g \cdot \rho}{\sigma_x(t)}, \tag{10}$$

где $\sigma_x(t)$ – мгновенное напряжение натяжения нити в момент времени t.

Интегрируя (10) с учетом краевых условий $u(0) = u(\ell) = 0$, получаем уравнение прогибов нити, аналогичное (8) [4]:

$$u = \frac{g \cdot \rho}{\sigma_x(t)} x \cdot (\ell - x). \tag{11}$$

Учитывая, что относительное укорочение нити $(\Delta\ell/\ell)$ при ее предварительном натяжении на $\Delta\ell$ остается постоянным, то для определения упруго-вязкого поведения материала нити можно использовать модель Максвелла, когда $\dot{\varepsilon}_x = 0$ [4]:

$$\dot{\sigma}_x(t) + \frac{E}{\eta}\sigma_x(t) = 0. \tag{12}$$

Решая (12) при начальном условии $\sigma_x(0) = E\frac{\Delta\ell}{\ell}$ получаем, что $\sigma_x(t)$ можно определить, как:

$$\sigma_x(t) = E \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell} \cdot e^{-E/\eta \cdot t}. \tag{13}$$

Основным неудобством практического применения (13) является неопределенность, как для твердого тела определить вязкость η.

Кроме (13) в (11) для определения реологического поведения натянутой нити можно использовать также наследственные уравнения ползучести [3; 4]:

$$\sigma(t) = \Im\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\left(1 - \int_0^t R(t,\tau)d\tau\right),$$

$$\sigma(t) = E(0)\cdot\frac{\Delta\ell}{\ell}\cdot\left(\frac{E(t)}{E(0)} - \int_0^t \frac{E(\tau)}{E(0)}\cdot R(t,\tau)d\tau\right). \tag{14}$$

В данном конкретном случае применение наследственных уравнений ползучести эквивалентно использованию технической теории старения в форме [3]:

$$\sigma(t) = \Im(\varepsilon)\cdot T(t).$$

с точностью до замены функции времени $T(t)$ на интегральные выражения с использованием ядра ползучести (14).

Заключение. Решена задача о малых поперечных прогибах весомой горизонтально натянутой нити под действием силы тяжести.

Установлено, что поперечные прогибы предварительно натянутой между неподвижными точками нити описываются параболой.

Получено уравнение позволяющее определить максимальную величину прогиба нити в зависимости от деформационных и реологических характеристик ее материала.

Список использованных источников

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
4. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 418 с.