

УДК 539.3

## МЕТОДИКА УЧЕТА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ДЕФОРМИРУЕМОГО ПОКРЫТИЯ В ЕГО ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ

**Кравчук Александр Степанович**

д-р физ.-мат. наук

**Кравчук Анжелика Ивановна**

канд. физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

*author@apriori-journal.ru*

**Аннотация.** В статье предлагается геометрическое обобщение модели Винклера на случай переменной толщины покрытия. В частности, в качестве примера впервые аналитически решены контактные задачи обжатия ровными недеформируемыми полупространствами однородного и слоистого гиперэластичных шаров. Кроме линейно упругой деформации элементов однородного покрытия рассматриваются линейно деформируемое слоистое, композиционное, нелинейно-деформируемое слоистое и композиционное покрытия. Нелинейность моделируется как билинейной диаграммой Грандтля, так и степенной функцией, что выполняется впервые. Процесс разгрузки не рассматривается.

**Ключевые слова:** основание Винклера; уравнения состояния; линейно-деформируемый материал; нелинейно-деформируемый материал; композиционный материал; слоистый материал.

# METHOD OF ACCOUNTING OF VARIABLE THICKNESS OF DEFORMED COATING IN ITS SIMPLE MODEL

**Kravchuk Alexander Stepanovich,**

doctor of physical and mathematical sciences

**Kravchuk Anzhelica Ivanovna**

candidate of physical and mathematical sciences  
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

**Abstract.** The paper proposes a geometric generalization of the Winkler foundation to the case of variable thickness of a deformable layer. In particular, at the first time the contact problems of compression of hyperelastic homogeneous and layered balls by flat and undeformable half-spaces are analytically solved. Besides linear elastic deformation of the uniform coating considered linearly deformable laminated, composite, nonlinearly deformable laminated and composite coating. Nonlinearity is modeled as a bilinear diagram Prandtl and power function. The unloading process is not considered.

**Key words:** Winkler base; equation of state; linearly deformable material; nonlinear deformable material; composite material; laminated material.

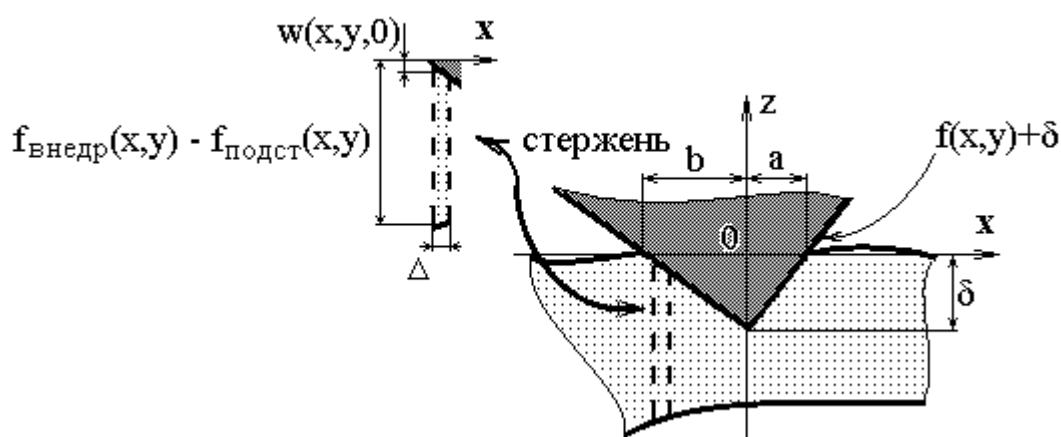
**Введение.** В работах [1; 2] дано методическое исследование возможных уравнений состояния, которые можно применить при решении контактной задачи с использованием простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины (обобщенной модели Винклера). Однако узким местом рассмотренного обобщения модели Винклера является использование гипотезы о постоянной толщине покрытия [3]. В частности, не понятно, каким образом определяется толщина покрытия, например, при расчете фундаментов, когда слой «деформируемого» грунта переменной толщины лежит на существенно неровной (по сравнению с глубиной внедрения) твердой подстилающей поверхности.

В настоящей статье обсуждаются методы геометрического обобщения решаемых с помощью простейшей модели деформируемого покрытия задач на случай как неровной поверхности внедрения, так и неровной подстилающей жесткой поверхности. Предложенная методика позволила, в частности, решить в качестве примеров ранее не доступные для аналитического решения задачи об обжатии недеформируемыми полупространствами однородного и слоистого гиперэластичных шаров.

**Гипотезы, используемые в модели деформируемого покрытия переменной толщины.** Предполагается, что поверхность внедрения покрытия (верхняя поверхность) определяется функцией  $f_{внедр}(x, y)$ , где  $f_{внедр}(0,0)=0$ . Покрытие покрывает жесткое недеформируемое полупространство с уравнением поверхности  $f_{подст}(x, y)$ .

В рамках задач механики контактного взаимодействия внедряемое в покрытие тело является недеформируемым, т.е. жестким штампом с уравнением поверхности  $f(x, y)$ , где  $f(0,0)=0$ . Очевидно, что до нагружения штампа предполагается, что он касается покрытия в точке с координатами  $(0,0,0)$ . Пусть открытое множество  $S \subset X0Y$  является внутренностью области контакта, т.е.  $S = \{(x, y) | \sigma_z(x, y, 0) \neq 0\}$ , где  $\sigma_z(x, y, 0)$  – контактные напряжения. Тогда замыкание  $\bar{S}$  является областью контакта.

Очевидно, необходимо выполнено  $f_{внедр}(x, y) > f_{подст}(x, y)$ , где  $(x, y) \in \bar{S}$ .



**Рис. 1. Внедрение криволинейного индентора в деформируемое покрытие переменной толщины**

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями с постоянным квадратным сечением  $\Delta x \Delta$  в плоскости  $X0Y$  и высотой  $f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y) > 0$  (Рис. 1). Стержни могут перемещаться только в  $Z$ -направлении, при этом их напряженно-

деформированное состояние призматического элемента является однородным [1, 3]. Размер  $\Delta$  пренебрежимо мал в сравнении с наименьшим характерным размером области контакта  $\bar{S}$  в плоскости XOY (Рис. 1).

**Краевое условие по перемещениям.** Учитывая, что в рамках простейшей модели деформируемого покрытия контактные напряжения  $\sigma_z(x, y, 0) \neq 0$  могут возникнуть только в точке, в которой перемещение в области контакта  $w(x, y, 0) \neq 0$ , то внутренность области контакта гораздо проще определить как  $S = \{(x, y) | w(x, y, 0) \neq 0\}$ . При принятых предположениях краевое условие по перемещениям определяется следующим уравнением:

$$w(x, y, 0) = \begin{cases} f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta, & (x, y) \in \bar{S}, \\ 0, & (x, y) \notin \bar{S}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\delta$  – глубина внедрения штампа относительно точки  $(0, 0, 0)$ . Она определяется из геометрических соображений, т.е. на границе области контакта  $(x, y) \in \bar{S} \setminus S$  контактные перемещения равны нулю ( $w(x, y, 0)|_{(x, y) \in \bar{S} \setminus S} = 0$ ). Принимая во внимание верхнее уравнение (1), получаем, что для любой достоверно определенной точки на границе области контакта  $(x, y) \in \bar{S} \setminus S$  выполнено равенство:

$$\delta = (-f(x, y) + f_{внедр}(x, y))|_{(x, y) \in \bar{S} \setminus S}. \quad (2)$$

**Формальное определение напряжений в области контакта без учета временных эффектов.** Для определения напряжений, действующих в области контакта, достаточно использовать соответствующее поставленной задаче уравнение состояния  $\sigma = \mathfrak{S}(\varepsilon)$ . Используя предположение о деформируемости призматических стержней только в Z-направлении и определения деформации стержня высотой  $f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, 0) = \mathfrak{S}(\varepsilon(x, y, 0)) &= \mathfrak{S}\left(\frac{w(x, y, 0)}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)}\right) = \\ &= \mathfrak{S}\left(\frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)}\right), (x, y) \in \bar{S}. \end{aligned} \quad (3)$$

**Уравнения равновесия штампа на границе без учета временных эффектов.** Уравнение (3) будет иметь параметры, которые должны определять конкретные размеры и форму области контакта по величине приложенной нагрузки. Задавая все константы уравнения состояния  $\sigma = \mathfrak{S}(\varepsilon)$ , значения параметров, определяющих размеры области контакта  $\bar{S}$ , и, выполняя интегрирование контактных напряжений  $\sigma_z(x, y, 0)$ , из (3)

можно определить величину необходимой для получения указанной области контакта силы  $P$  по формуле:

$$P = -\iint_{\bar{S}} \sigma_z(x, y) dx dy \quad (4)$$

После этого можно определить еще два опрокидывающих штамп главных момента  $M_x$  и  $M_y$ , действующих в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$  и уравновешивающих несимметрично вдавливаемый штамп до получения предполагаемой области контакта  $\bar{S}$ :

$$M_x = -\iint_{\bar{S}} \sigma_z(x, y) \cdot x dx dy, \quad M_y = -\iint_{\bar{S}} \sigma_z(x, y) \cdot y dx dy. \quad (5)$$

Обычно предполагается, что задача имеет геометрическую и физическую симметрию и, соответственно, главные моменты равны нулю  $M_x = M_y = 0$ .

**Однослойное упругое покрытие переменной толщины.** Рассмотрим случай линейной связи напряжений и деформаций. В этом случае:

$$\mathfrak{Z}(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon, \quad (6)$$

где  $E$  – модуль упругости изотропного однослойного покрытия. Уравнение (6) является уравнением состояния для модели Винклера [1, 3]. Тогда контактные напряжения определяются в соответствии с (3):

$$\sigma_z(x, y, 0) = E \frac{w(x, y, 0)}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)} = E \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)}. \quad (7)$$

**Горизонтально слоистое упругое покрытие переменной толщины.** Перейдем к рассмотрению горизонтально слоистого покрытия переменной толщины. Для этого рассмотрим деформацию многослойного призматического стержня размером  $\Delta \times \Delta \times (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y))$  с координатами  $(x, y)$  на плоскости  $XOY$ , имитирующей деформацию покрытия в этой точке. Рассмотрим горизонтально слоистый стержень из  $N$  слоев. При этом  $k$ -ый слой ( $k = \overline{1, N}$ ) в точке  $(x, y)$  имеет высоту  $h_k(x, y)$  и модуль упругости  $E_k$  материала слоя. Очевидно, выполнено равенство:

$$h(x, y) = (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)) = \sum_{k=1}^N h_k(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{S}.$$

Напряжения  $\sigma_z(x, y, 0)$ , действующие в области контакта  $\bar{S}$  на весь стержень с координатами  $(x, y) \in S$ , равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство  $\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_z\left(x, y, -h(x, y) + \sum_{i=1}^k h_i(x, y)\right) = \sigma_{z,k}(x, y, 0) \quad \forall k = \overline{1, N}$ . Следуя методике, изложенной в [1], получаем следующие уравнения для деформа-

ции  $\varepsilon_{z,k}(x, y, 0)$  отдельного слоя с номером ( $k = \overline{1, n}$ ) и координатами  $(x, y) \in \overline{S}$  при сжатии:

$$\varepsilon_{z,k}(x, y, 0) = \varepsilon_z \left( x, y, -h(x, y) + \sum_{i=1}^k h_i(x, y) \right) = \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_k}. \quad (8)$$

Определим суммарные перемещения  $w(x, y, 0)$  в  $Z$ -направлении для всего многослойного стержня с координатами  $(x, y) \in \overline{S}$  суммированием (8) для  $k = \overline{1, n}$ :

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) &= \sum_{k=1}^N w_k \left( x, y, -h(x, y) + \sum_{i=1}^k h_i(x, y) \right) = \sum_{k=1}^N h_k(x, y) \cdot \varepsilon_{z,k}(x, y, 0) = \\ &= (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)) \cdot \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\langle E(x, y) \rangle_{сл}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где усредненные коэффициенты  $\langle E(x, y) \rangle_{сл}$  горизонтально слоистого призматического стержня определяются уравнениями:

$$\langle E(x, y) \rangle_{сл} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k(x, y)}{E_k} \right)^{-1},$$

где  $\gamma_k(x, y) = \frac{h_k(x, y)}{h(x, y)}$ .

Необходимо обратить (9) и получить уравнение для  $\sigma_z(x, y, 0)$  от  $w(x, y, 0)$  для решения контактной задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, 0) &= \langle E(x, y) \rangle_{сл} \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)} = \\ &= \langle E(x, y) \rangle_{сл} \cdot \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) используется в уравнениях равновесия (4) и (5) для определения силы и действующих моментов, необходимых для достижения наперед заданных очертаний области контакта  $\overline{S}$ . Очевидно, также, что если относительные толщины слоев  $\gamma_k(x, y) \approx \langle \gamma_k \rangle = const, \forall k = \overline{1, N}$ , то  $\langle E(x, y) \rangle_{сл} = \langle E \rangle_{сл} = const$  и решение (10) аналогично решению для многослойного покрытия со слоями постоянной толщины [1].

Обычно распределение толщин слоев  $h_k(x, y)$  для всех слоев многослойных покрытий не известно. Экспериментально можно определить  $f_{подст}(x, y)$  перед нанесением покрытия, и  $f_{внедр}(x, y)$  после нанесения покрытия, кроме того можно считать известным уравнение поверхности индентора  $f(x, y)$ . Остальные геометрические параметры покрытия обычно известны только в смысле математического ожидания значений этих параметров. В частности, будем считать, что в смысле математического ожидания известны относительные толщины слоев  $\langle \gamma_k \rangle$  много-

слоистого покрытия. Из (9) можно записать, что в точке  $(x, y) \in \bar{S}$  верно уравнение:

$$w(x, y, 0) = (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)) \cdot \left( \sum_{k=1}^N \langle \gamma_k \rangle \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_k} + \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}_k(x, y) \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_k} \right), \quad (11)$$

где  $\tilde{\gamma}_k(x, y) = \langle \gamma_k \rangle - \gamma_k(x, y)$ . Из (11) можно получить:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)} - \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}_k(x, y) \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_k} \right). \quad (12)$$

Далее будем предполагать, что  $h(x, y) = \langle h \rangle + \tilde{h}(x, y)$ , тогда из (12) получаем:

$$\begin{aligned} & \sigma_z(x, y, 0) - \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \frac{w(x, y, 0)}{\langle h \rangle} \approx \\ & \approx - \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} w(x, y, 0) \frac{\tilde{h}(x, y)}{\langle h \rangle^2} - \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \tilde{\gamma}_k(x, y) \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_k} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Приближенное равенство (13) позволяет дать оценку применению гипотезы о эквивалентности модели индентирования многослойного покрытия переменной толщины со слоями переменной толщины (10) и модели индентирования тем же штампом ровного покрытия постоянной толщины  $\langle h \rangle$  со слоями постоянной толщины  $\langle \gamma_k \rangle \cdot \langle h \rangle$  ( $k = \overline{1, N}$ ):

$$\sigma_z(x, y, 0) \approx \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \frac{w(x, y, 0)}{\langle h \rangle}. \quad (14)$$

Для определения ошибки замены модели (10) моделью (14) будем предполагать, что для каждого слоя известны модули максимальных отклонений относительных толщин слоев материалов  $\xi_k$  ( $\xi_k = \max\{|\tilde{\gamma}_k(x, y)|\}$ ,  $k = \overline{1, N}$ ) и модуль максимального отклонения суммарной толщины многослойного покрытия  $\xi_h$  ( $\xi_h = \max\{|\tilde{h}(x, y)|\}$ ). И далее из (13) получаем следующую оценку относительной вычислительной погрешности замены модели (10) моделью (14):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P} \iint_{\bar{S}} \left| \sigma_z(x, y, 0) - \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \frac{w(x, y, 0)}{\langle h \rangle} \right| dx dy \leq \\ & \leq \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \frac{\xi_h}{\langle h \rangle} \frac{\iint_{\bar{S}} \left( -\frac{w(x, y, 0)}{\langle h \rangle} \right) dx dy}{P} + \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k}{E_k} \right) \frac{-\iint_{\bar{S}} \sigma_z(x, y, 0) dx dy}{P} = \\ & = \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \frac{\xi_h}{\langle h \rangle} \frac{\iint_{\bar{S}} \left( -\frac{w(x, y, 0)}{\langle h \rangle} \right) dx dy}{P} + \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k}{E_k} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Относительная ошибка (15) определяется в долях от величины  $P$  главного вектора сил, приложенных к внедряемому штампу.

**Упругое композиционное структурно неоднородное покрытие.** Используя методику работы [1], перейдем к моделированию композиционного упруго-деформируемого покрытия. Будем предполагать, что призматические стержни, используемые при построении простейшей модели деформируемого покрытия с постоянным квадратным сечением шириной  $\Delta$  и высотой  $\min_{(x,y) \in S} (f_{внедр}(x,y) - f_{подст}(x,y))$ , представляют собой макроточку.

Для решения задачи определения эффективных модулей рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в твердом теле, т.е. в данном случае рассматривается сжатие призматических стержней, находящихся под внедряемым штампом (Рис. 1). Предполагается, что значения объемных долей  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) (концентраций) компонент композиционного покрытия известны для покрытия в целом, и они же являются объемными долями компонент для каждого из стержней. При усреднении упругих характеристик композиционного материала стержня предполагается, что механические свойства  $E_k$  (модуль упругости) известны для каждой компоненты  $k$  ( $k = \overline{1, N}$ ). Тогда для рассматриваемой модели структурно неоднородного покрытия переменной толщины получаем [1]:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \langle E \rangle_X \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)} = \langle E \rangle_X \cdot \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)}, \quad (16)$$

где

$$\langle E \rangle_X = \frac{1}{2} (\langle E \rangle_P + \langle E \rangle_\Phi) = \frac{1 + \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k \right) \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k}}{2 \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k}}.$$

**Нелинейно деформируемое однослойное покрытие, деформация которого моделируется билинейной диаграммой Прандтля.** В данном случае для призматических стержней, моделирующих деформацию покрытия конечной толщины, необходимо рассмотреть следующее уравнение состояния [1]:

$$\mathfrak{S}(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon < \frac{\sigma_T^{сж}}{E}, \\ \sigma_T^{сж} + E_T^{сж} \cdot \left( \varepsilon - \frac{\sigma_T^{сж}}{E} \right), & \frac{\sigma_T^{сж}}{E} \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (17)$$



где  $E$  – модуль упругости покрытия,  $\sigma_T^{сж}$  – предел текучести при сжатии (он отличается от предела текучести при растяжении),  $E_T^{сж}$  – касательный модуль пластичности при сжатии. Параметр  $E_T^{сж}$  определяет упрочнение материала.

Уравнение (17) часто встречается в технических приложениях для моделирования упругопластической деформации твердого тела. Его можно использовать даже в случае геометрически больших перемещений в области контакта при испытаниях на твердость [1]:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \begin{cases} E \cdot \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)}, & 0 \geq \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)} > \frac{\sigma_T^{сж}}{E}, \\ E_T^{сж} \cdot \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)} + \left(1 - \frac{E_T^{сж}}{E}\right) \cdot \sigma_T^{сж}, & \frac{\sigma_T^{сж}}{E} \geq \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)}. \end{cases} \quad (18)$$

**Нелинейно деформируемое многослойное покрытие, деформация слоев которого описывается билинейной диаграммой Прандтля.** Стержень в простейшей многослойной модели покрытия состоит из  $N$  слоев с высотами  $h_k(x, y)$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Также как и ранее предполагаем, что выполнено очевидное равенство:

$$h(x, y) = (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)) = \sum_{k=1}^N h_k(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{S}.$$

Далее предполагается, что деформационная кривая каждого слоя при его сжатии или растяжении определяется билинейной диаграммой Прандтля (17). Это означает, что механические свойства  $E_k$  (модуль упругости),  $E_{T,k}^{сж}$  (касательный модуль пластичности при сжатии),  $\sigma_{T,k}^{сж}$  (предел текучести при сжатии) известны для каждого слоя с номером  $k$  ( $k = \overline{1, N}$ ).

Напряжения  $\sigma_z(x, y, 0)$ , действующие в области контакта  $\bar{S}$  на весь стержень с координатами  $(x, y) \in \bar{S}$ , равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство  $\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_z\left(x, y, -h(x, y) + \sum_{i=1}^k h_i(x, y)\right) = \sigma_{z,k}(x, y, 0) \quad \forall k = \overline{1, N}$ . Следовательно, получаем следующие уравнения для деформации  $\varepsilon_{z,k} = \varepsilon_z\left(x, y, -h(x, y) + \sum_{i=1}^k h_i(x, y)\right)$  отдельного слоя с номером ( $k = \overline{1, n}$ ) и координатами  $(x, y) \in \bar{S}$  при сжатии:

$$\varepsilon_{z,k} = \begin{cases} \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_k}, & 0 \geq \sigma_z(x, y, 0) > \sigma_{T,k}^{cж}, \\ \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_{T,k}^{cж}} + \left( \frac{E_{T,k}^{cж} - E_k}{E_{T,k}^{cж} \cdot E_k} \right) \cdot \sigma_{T,k}^{cж}, & \sigma_{T,k}^{cж} \geq \sigma_z(x, y, 0). \end{cases} \quad (19)$$

Определим суммарные перемещения  $w(x, y, 0)$  в  $Z$ -направлении для всего многослойного стержня с координатами  $(x, y) \in \bar{S}$  суммированием (19) умноженного на  $h_k(x, y)$  для  $k = \overline{1, N}$ :

$$w(x, y, 0) = \sum_{k=1}^N h_k(x, y) \cdot \varepsilon_{z,k} = \begin{cases} h(x, y) \cdot \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\langle E(x, y) \rangle_{cl}}, & 0 \geq \sigma_z(x, y, 0) > \langle \sigma_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl}, \\ h(x, y) \cdot \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\langle E_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl}} + h(x, y) \cdot \frac{\langle E_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl} - \langle E(x, y) \rangle_{cl}}{\langle E_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl} \cdot \langle E(x, y) \rangle_{cl}} \cdot \langle \sigma_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl}, & \langle \sigma_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl} \geq \sigma_z(x, y, 0), \end{cases} \quad (20)$$

где усредненные по реализации толщин в точке  $(x, y) \in \bar{S}$  коэффициенты  $\langle E(x, y) \rangle_{cl}$ ,  $\langle E_T(x, y) \rangle_{cl}$ ,  $\langle \sigma_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl}$  горизонтально слоистого призматического стержня определяются уравнениями:

$$\gamma_k(x, y) = \frac{h_k(x, y)}{h(x, y)}, \quad \langle E(x, y) \rangle_{cl} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k(x, y)}{E_k} \right)^{-1},$$

$$\langle E_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k(x, y)}{E_{T,k}^{cж}} \right)^{-1}, \quad (21)$$

$$\langle \sigma_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl} = \left( \frac{\langle E_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl} \cdot \langle E(x, y) \rangle_{cl}}{\langle E_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl} - \langle E(x, y) \rangle_{cl}} \right) \cdot \sum_{k=1}^N \gamma_k(x, y) \cdot \sigma_{T,k}^{cж} \cdot \left( \frac{E_k - E_{T,k}^{cж}}{E_{T,k}^{cж} \cdot E_k} \right).$$

Для решения контактной задачи необходимо обратить (20) и получить выражение  $\sigma_z(x, y, 0)$  через  $w(x, y, 0)$ :

$$\sigma_z(x, y, 0) = \begin{cases} \langle E(x, y) \rangle_{cl} \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)}, & 0 \geq \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)} > \frac{\langle \sigma_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl}}{\langle E(x, y) \rangle_{cl}}, \\ \langle E_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl} \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)} + \left( 1 - \frac{\langle E_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl}}{\langle E(x, y) \rangle_{cl}} \right) \cdot \langle \sigma_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl}, & \frac{\langle \sigma_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl}}{\langle E(x, y) \rangle_{cl}} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)}. \end{cases} \quad (22)$$

Усредненные по реализации толщин в точке  $(x, y) \in \bar{S}$  коэффициенты  $\langle E(x, y) \rangle_{cl}$ ,  $\langle E_T(x, y) \rangle_{cl}$ ,  $\langle \sigma_T^{cж}(x, y) \rangle_{cl}$  (21) зависят от координат  $(x, y)$  только по-

тому, что относительные высоты (объемные доли слоев)  $\gamma_k(x, y)$  в рассматриваемой модели зависят от координат  $(x, y)$ .

Определение ошибки при замене функций  $\gamma_k(x, y)$  и  $h(x, y)$  их математическими ожиданиями  $\langle \gamma_k \rangle$  и  $\langle h \rangle$  ( $\tilde{\gamma}_k(x, y) = \langle \gamma_k \rangle - \gamma_k(x, y)$ ,  $\tilde{h}(x, y) = \langle h \rangle - h(x, y)$ ), а также замене усредненных по реализации толщин коэффициентов (21)

их постоянными значениями  $\langle E \rangle_{cl} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_k} \right)^{-1}$ ,  $\langle E_T \rangle_{cl} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{\langle \gamma_k \rangle}{E_{T,k}^{сж}}$ ,

$\langle \sigma_T^{сж} \rangle_{cl} = \left( \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_{cl} \cdot \langle E \rangle_{cl}}{\langle E \rangle_{cl} - \langle E_T^{сж} \rangle_{cl}} \right) \cdot \sum_{k=1}^N \langle \gamma_k \rangle \cdot \sigma_{T,k}^{сж} \cdot \left( \frac{E_k - E_{T,k}^{сж}}{E_{T,k}^{сж} \cdot E_k} \right)$  сопряжено с громоздкими пре-

образованиями и является самостоятельным исследованием. Очевидно, что можно получить оценку аналогичную (15), однако она будет иметь несопоставимо более громоздкий вид.

**Нелинейно деформируемое композиционное структурно неоднородное покрытие, деформация компонент которого описывается билинейной диаграммой Прандтля.** Используя методику работы [1], перейдем к моделированию композиционного нелинейно-деформируемого покрытия. Будем предполагать, что призматические стержни, используемые при построении простейшей модели деформируемого покрытия, с постоянным квадратным сечением шириной  $\Delta$  и высотой  $\min_{(x,y) \in S} (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y))$  представляют собой макроточку.

Предполагается, что значения объемных долей  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) (концентраций) компонент композиционного покрытия известны для покрытия в целом, и они же являются объемными долями компонент для каждого из стержней. При усреднении упругих характеристик композиционного материала стержня предполагается, что механические свойства  $E_k$  (модуль упругости),  $\sigma_{T,k}^{сж}$  – предел текучести при сжатии (он отличается от предела текучести при растяжении),  $E_{T,k}^{сж}$  – касательный модуль пластичности при сжатии известны для каждой компоненты  $k$  ( $k = \overline{1, N}$ ).

Для рассматриваемой модели структурно неоднородного покрытия переменной толщины получаем:

$$\langle \sigma_z(x, y) \rangle = \begin{cases} \langle E \rangle_X \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)}, & 0 \geq \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)} > \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X}, \\ \langle E_T^{сж} \rangle_X \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)} + \left( 1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \right) \langle \sigma_T^{сж} \rangle_X, & \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y)}, \end{cases} \quad (23)$$

где эффективные упруго-пластические характеристики композиционного материала определяются уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_X &= \frac{1}{2} (\langle E \rangle_P + \langle E \rangle_\Phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k} \right)}{\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k}} \right), \\ \langle E_T^{сж} \rangle_X &= \frac{1}{2} (\langle E_T^{сж} \rangle_P + \langle E_T^{сж} \rangle_\Phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_{T,k}^{сж} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right)}{\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}}} \right), \\ \langle \sigma_T^{сж} \rangle_X &= \frac{\left( \left( 1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right) \cdot \langle \sigma_T^{сж} \rangle_P + \left( 1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_\Phi}{\langle E \rangle_\Phi} \right) \langle \sigma_T^{сж} \rangle_\Phi \right)}{2 \left( 1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \right)} = \\ &= \frac{\left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \sigma_{T,k}^{сж} \cdot \left( \frac{E_k - E_{T,k}^{сж}}{E_{T,k}^{сж} \cdot E_k} \right) \right) + \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \left( 1 - \frac{E_{T,k}^{сж}}{E_k} \right) \sigma_{T,k}^{сж} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right)}{2 \cdot \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right) \cdot \left( 1 - \frac{\left( 1 + \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_{T,k}^{сж} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right) \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k} \right)}{\left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right) \cdot \left( 1 + \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k} \right) \right)} \right)}. \end{aligned}$$

**Применение степенной функции в уравнении состояния при моделировании нелинейно-деформируемого однослойного покрытия.** В данном случае для призматических стержней, моделирующих деформацию покрытия конечной толщины необходимо рассмотреть следующее уравнение состояния [1, 3]:

$$\mathfrak{S}(\varepsilon) = \sigma_{эм}^{сж} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{эм}^{сж}} \right)^{\alpha^{сж}}, \quad (24)$$

где  $\sigma_{эм}^{сж}$ ,  $\varepsilon_{эм}^{сж}$ ,  $\alpha^{сж}$  ( $\alpha^{сж} < 1$ ) – характерные для материала константы, определяемые исходя из аппроксимации с помощью (24) диаграммы одноосного сжатия образца материала. Например, для металлов в качестве  $\sigma_{эм}^{сж}$  можно взять предел текучести при сжатии материала, а в качестве  $\varepsilon_{эм}^{сж}$  соответствующую пределу текучести деформацию.

Уравнение (24) также часто встречается в технических приложениях для моделирования развитой пластической деформации твердого тела или моделирования гиперэластичных материалов. Его можно использо-

вать даже в случае геометрически больших перемещений в области контакта:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_{эм}^{сж} \cdot \left( \frac{w(x, y, 0)}{h(x, y) \cdot \varepsilon_{эм}^{сж}} \right)^{\alpha_k^{сж}} = \sigma_{эм}^{сж} \cdot \left( \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{(f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)) \cdot \varepsilon_{эм}^{сж}} \right)^{\alpha_k^{сж}}. \quad (25)$$

**Степенная функция в уравнении состояния многослойного покрытия переменной толщины.** Перейдем к рассмотрению горизонтально слоистого покрытия постоянной толщины. Стержень в простейшей многослойной модели покрытия состоит из  $N$  слоев с высотами  $h_k(x, y)$ , кроме того будем считать, что экспериментально определены значения характерного напряжения  $\sigma_{эм, k}^{сж}$ , деформации  $\varepsilon_{эм, k}^{сж}$  и показателя степени  $\alpha_k^{сж}$  для каждого слоя  $k = \overline{1, N}$ . Также как и ранее предполагаем, что выполнено очевидное равенство:

$$h(x, y) = (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)) = \sum_{k=1}^N h_k(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{S}.$$

Напряжения  $\sigma_z(x, y, 0)$ , действующие в области контакта на весь стержень с координатами  $(x, y) \in \bar{S}$ , равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство  $\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_z \left( x, y, -h(x, y) + \sum_{i=1}^k h_i(x, y) \right) = \sigma_{z, k}(x, y, 0) \quad \forall k = \overline{1, N}$ . Следуя методике, изложенной в [1], получаем следующие уравнения для деформации  $\varepsilon_{z, k}(x, y, 0)$  отдельного слоя с номером  $(k = \overline{1, N})$  и координатами  $(x, y) \in S$  при сжатии:

$$\varepsilon_{z, k}(x, y, 0) = \varepsilon_z \left( x, y, -h(x, y) + \sum_{i=1}^k h_i(x, y) \right) = \varepsilon_{эм, k}^{сж} \left( \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\sigma_{эм, k}^{сж}} \right)^{\frac{1}{\alpha_k^{сж}}}. \quad (26)$$

Определим суммарные перемещения  $w(x, y, 0)$  в  $Z$ -направлении для всего многослойного стержня с координатами  $(x, y) \in S$  суммированием (26) для  $k = \overline{1, N}$ :

$$w(x, y, 0) = \sum_{k=1}^N h_k(x, y) \cdot \varepsilon_{z, k}(x, y, 0) = h(x, y) \sum_{k=1}^N \gamma_k(x, y) \cdot \varepsilon_{эм, k}^{сж} \left( \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\sigma_{эм, k}^{сж}} \right)^{\frac{1}{\alpha_k^{сж}}}. \quad (27)$$

Будем считать, что (27) можно приблизить следующим выражением:

$$w(x, y, 0) = h(x, y) \cdot \left\langle \varepsilon_{эм}^{сж}(x, y) \right\rangle_P \cdot \left( \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\left\langle \sigma_{эм}^{сж}(x, y) \right\rangle_P} \right)^{\left\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}(x, y)} \right\rangle_P}. \quad (28)$$

Для того, чтобы упростить приближение (27) с помощью усредненных коэффициентов  $\langle \varepsilon_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P$ ,  $\langle \sigma_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P$ ,  $\langle \frac{1}{\alpha_k^{сжс}(x, y)} \rangle_P$  в (28), сделаем предположение, что:

$$\langle \sigma_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P \approx \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k(x, y)}{\sigma_{эм,k}^{сжс}} \right)^{-1}. \quad (29)$$

Тогда можно получить уравнение для получения значения  $\langle \varepsilon_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P$ :

$$\langle \varepsilon_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P \approx \sum_{k=1}^N \gamma_k(x, y) \cdot \varepsilon_{эм,k}^{сжс} \left( \frac{\langle \sigma_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P}{\sigma_{эм,k}^{сжс}} \right)^{\alpha_k^{сжс} - 1}. \quad (30)$$

Кроме того, продифференцировав (27) и (28) по  $\sigma_z$ , и подставив вместо  $\sigma_z(x, y)$  выражение  $\langle \sigma_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P$ , получаем уравнение для определения  $\langle \frac{1}{\alpha_k^{сжс}} \rangle_P$ :

$$\langle \frac{1}{\alpha_k^{сжс}(x, y)} \rangle_P \approx \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k(x, y) \cdot \varepsilon_{эм,k}^{сжс} \frac{1}{\alpha_k^{сжс}} \left( \frac{\langle \sigma_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P}{\sigma_{эм,k}^{сжс}} \right)^{\alpha_k^{сжс} - 1}}{\langle \varepsilon_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P}. \quad (31)$$

Таким образом, усредненные коэффициенты  $\langle \varepsilon_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P$ ,  $\langle \sigma_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P$ ,  $\langle \frac{1}{\alpha_k^{сжс}(x, y)} \rangle_P$  горизонтально слоистого нелинейно-деформируемого призматического стержня определяются уравнениями (29)-(31). Необходимо обратить (28) и получить уравнение для  $\sigma_z(x, y, 0)$  от  $w(x, y, 0)$  для решения контактной задачи:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \langle \sigma_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P \cdot \left( \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{(f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y)) \cdot \langle \varepsilon_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P} \right)^{\langle \frac{1}{\alpha_k^{сжс}(x, y)} \rangle_P^{-1}}. \quad (32)$$

Оценить замену в (32) функций  $\langle \varepsilon_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P$ ,  $\langle \sigma_{эм}^{сжс}(x, y) \rangle_P$ ,  $\langle \frac{1}{\alpha_k^{сжс}(x, y)} \rangle_P$  их постоянными значениями, получаемыми при подстановке вместо  $\gamma_k(x, y)$  ( $k = \overline{1, N}$ ) их математических ожиданий  $\langle \gamma_k \rangle$  ( $k = \overline{1, N}$ ), а также вместо переменной толщины  $h(x, y) = (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y))$ ,  $\forall (x, y) \in \bar{S}$  ее среднего значения  $\langle h \rangle$  не представляется возможным.

**Степенные функции в уравнении состояния композиционного структурно неоднородного покрытия.** Принцип реализации метода гомогенизации для призматического стержня квадратного сечения из простейшей модели деформируемого покрытия изложен в работе [1].

Следуя [1], будем предполагать, что стержень состоит из  $N$  материалов с объемными долями  $\gamma_k$ , и для каждого материала  $k = \overline{1, N}$  экспериментально определены значения характерного напряжения  $\sigma_{эм, k}^{сж}$ , деформации  $\varepsilon_{эм, k}^{сж}$  и показателя степени  $\alpha_k^{сж}$ .

Тогда получаем [1]:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z(x, y, 0) \rangle = & \frac{1}{2} \left[ \langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P \cdot \left( \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{\langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P \cdot (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y))} \right)^{\left\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \right\rangle_P^{-1}} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^N \left[ \gamma_k \cdot \sigma_{эм, k}^{сж} \left( \frac{f(x, y) - f_{внедр}(x, y) + \delta}{\varepsilon_{эм, k}^{сж} \cdot (f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y))} \right)^{\alpha_k^{сж}} \right] \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P & \approx \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{\sigma_{эм, k}^{сж}} \right)^{-1}, \quad \langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P \approx \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \varepsilon_{эм, k}^{сж} \left( \frac{\langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle}{\sigma_{эм, k}^{сж}} \right)^{\alpha_k^{сж}}, \\ \left\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \right\rangle_P & \approx \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \varepsilon_{эм, k}^{сж} \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \left( \frac{\langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P}{\sigma_{эм, k}^{сж}} \right)^{\frac{1}{\alpha_k^{сж}} - 1}}{\langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P}. \end{aligned}$$

**Замечание по возможному применению некоторых обобщений.**

Если в формулах (16), (23) и (33) для структурно-неоднородных композиционных покрытий принять коэффициенты  $\gamma_k$  переменными (т.е. функциями  $\gamma_k(x, y)$ ), то можно оценить влияние технологических отклонений в концентрации элементов в смеси на локальные механические свойства покрытий.

**Примеры решения контактных задач обжатия гиперэластичного шара двумя ровными и жесткими полупространствами.** Пусть дан деформируемый шар радиуса  $R$  с центром в точке  $z = -R$ :

$$x^2 + y^2 + (z + R)^2 \leq R^2, \quad (34)$$

Очевидно, что при решении симметричной относительно плоскости  $XOY$  задачи (обжимающие плоскости одинаковы) достаточно решить контактную задачу для полушара, т.к. контактные напряжения останутся

теми же, а сближение двух полупространств при обжатии шара будет равно удвоенному сближению, найденному при решении задачи для полушара.

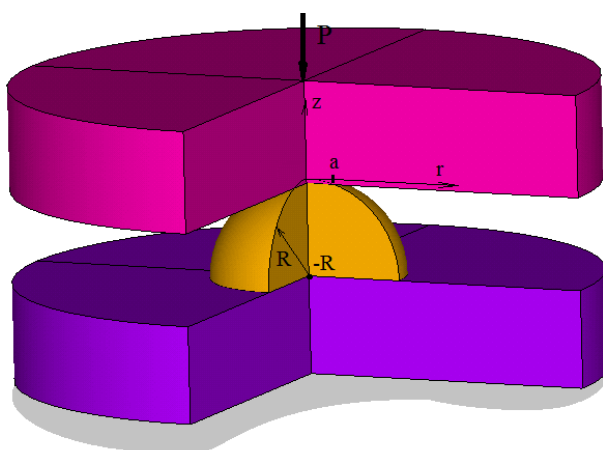
Таким образом, поставленная задача сведена к задаче, поставленной для деформируемого тела, определяемого системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z+R)^2 \leq R^2, \\ z \geq -R. \end{cases} \quad (35)$$

Данная область может рассматриваться как покрытие с переменной толщиной. Т.е. в связи с принятыми выше обозначениями уравнение поверхности индентора  $f(x, y) = 0$  (т.е. ровная плоскость, проходящая через  $z = 0$ ), уравнение поверхности внедрения  $f_{внедр}(x, y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} - R$  (уравнение полушара), уравнение подстилающей поверхности  $f_{подст}(x, y) = -R$  (т.е. ровная плоскость, проходящая через  $z = -R$ ) (Рис. 2). Подставляя указанные уравнения поверхностей в (1) и (2), получаем, что в области контакта выполнено условие:

$$w(x, y, 0) = \begin{cases} -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} + \sqrt{R^2 - a^2}, (x, y) \in \bar{S}, \\ 0, (x, y) \notin \bar{S}, \end{cases} \quad (36)$$

где  $a$  – радиус области контакта. Из построения области, занятой твердым телом, видно, что она осесимметричная. Из краевого условия по перемещениям видно, что краевое условие также осесимметрично. Структура распределения компонент с разными механическими свойствами является также осесимметричной (однородное или слоистое гиперэластичное тело).



**Рис. 2. Сжатие двумя плоскими поверхностями гиперэластичного полушара**



Таким образом, решаемая краевая задача с условием (36) является осесимметричной и можно выполнить замену  $r^2 = x^2 + y^2$  и перейти к цилиндрическим координатам  $(z, r)$ :

$$w(r,0) = \begin{cases} -\sqrt{R^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - a^2}, & r \in [0, a], \\ 0, & r \notin [0, a], \end{cases} \quad (37)$$

**Решение задачи для однородного гиперэластичного шара.** Заменяя деформируемый полушар гиперэластичными стержнями с квадратным сечением в соответствии с (25) получаем:

$$\sigma_z(r,0) = \sigma_{эм}^{сжс} \cdot \left( \frac{-\sqrt{R^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - a^2}}{\varepsilon_{эм}^{сжс} \cdot \sqrt{R^2 - r^2}} \right)^{\alpha^{сжс}}. \quad (38)$$

где  $\sigma_{эм}^{сжс}$  ( $\sigma_{эм}^{сжс} < 0$ ),  $\varepsilon_{эм}^{сжс}$  ( $\varepsilon_{эм}^{сжс} < 0$ ),  $\alpha^{сжс}$  – характерные для материала константы.

Неизвестную константу  $a$  из (38) необходимо определить исходя из уравнения равновесия, которое в осесимметричном случае имеет вид [1, 3] (Рис. 2):

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_z(r,0) \cdot r dr, \quad (39)$$

где  $P$  – величина главного вектора сил, приложенного к штампу.

К сожалению, в общем виде интеграл (39) с учетом (38) не вычисляется в квадратурах. Однако, подставив конкретные значения констант материала  $\sigma_{эм}^{сжс}$ ,  $\varepsilon_{эм}^{сжс}$ ,  $\alpha^{сжс}$  и значение радиуса области контакта  $a$ , можно вычислить конкретное значение нагрузки  $P$ . Далее, протабулировав таким образом значения  $P(a)$ , можно решить обратную задачу – задачу определения радиуса области контакта по действующей нагрузке.

Сближение двух жестких ровных полупространств при обжатии половины шара определяется выражением (2):

$$\delta = \sqrt{R^2 - a^2} - R. \quad (40)$$

Соответственно для целого шара значение (40) удваивается.

**Решение задачи для многослойного гиперэластичного шара.** Пусть для осесимметричного многослойного шара дана система радиусов  $\{R_k\}_{k=1}^N$  ( $R_1 < \dots < R_{k-1} < R_k < \dots < R_N < R$ ), определяющих границы  $N$  сферических слоев с постоянной толщиной  $\{R_k - R_{k-1}\}_{k=2}^{N+1}$ , где  $R_{N+1} = R$ . Уравнение толщин сферических слоев при  $k = \overline{2, N}$  имеет вид:

$$h_k(r) = \begin{cases} \sqrt{R_k^2 - r^2} - \sqrt{R_{k-1}^2 - r^2}, & r \in [0, R_{k-1}], \\ \sqrt{R_k^2 - r^2}, & r \in [R_{k-1}, R_k], \\ 0, & r \in [R_k, a]. \end{cases} \quad (41)$$

Будем предполагать, что радиус  $a$  области контакта многослойного шара с обжимающими его жесткими и ровными полупространствами меньше первого радиуса, т.е.  $a < R_1$ . Это не сильно снижающее общность предположение, позволяет существенно упростить аналитический результат и рассматривать для всех слоев только первое уравнение из (41). При  $k=1$  будем иметь  $h_1(r) = \sqrt{R_1^2 - r^2}$ , тогда вычислим относительные толщины в криволинейном многослойном пакете:

$$\gamma_1(r) = \frac{\sqrt{R_1^2 - r^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad (42)$$

$$\gamma_k(r) = \frac{\sqrt{R_k^2 - r^2} - \sqrt{R_{k-1}^2 - r^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad r \in [0, a], \quad k = \overline{2, N}.$$

Подставляя (42) в (29)-(31), получаем:

$$\langle \sigma_{эм}^{сж}(r) \rangle_P \approx \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k(r)}{\sigma_{эм,k}^{сж}} \right)^{-1}, \quad \langle \varepsilon_{эм}^{сж}(r) \rangle_P \approx \sum_{k=1}^N \gamma_k(r) \cdot \varepsilon_{эм,k}^{сж} \left( \frac{\langle \sigma_{эм}^{сж}(r) \rangle_P}{\sigma_{эм,k}^{сж}} \right)^{\frac{1}{\alpha_k^{сж}}}, \quad (43)$$

$$\left\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}(r)} \right\rangle_P \approx \frac{\sum_{k=1}^N \gamma_k(r) \cdot \varepsilon_{эм,k}^{сж} \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \left( \frac{\langle \sigma_{эм}^{сж}(r) \rangle_P}{\sigma_{эм,k}^{сж}} \right)^{\frac{1}{\alpha_k^{сж}} - 1}}{\langle \varepsilon_{эм}^{сж}(r) \rangle_P}.$$

Затем (43) подставляем в (32) и окончательно для многослойного гиперэластичного шара получаем:

$$\sigma_z(r,0) = \langle \sigma_{эм}^{сж}(r) \rangle_P \cdot \left( \frac{-\sqrt{R^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - a^2}}{\langle \varepsilon_{эм}^{сж}(r) \rangle_P \cdot \sqrt{R^2 - r^2}} \right)^{\left\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}(r)} \right\rangle_P^{-1}}. \quad (44)$$

Подставляя (44) в уравнение равновесия (39), определяем связь действующей нагрузки  $P$  и радиуса области контакта, а из уравнения определяем (40) сближение полупространств при обжатии слоистого полшара.

**Выводы.** В статье предлагается геометрическое обобщение модели Винклера на случай переменной толщины покрытия. В частности, в качестве примера впервые аналитически решены контактные задачи обжатия ровными недеформируемыми полупространствами однородного и слоистого гиперэластичных шаров. Кроме линейно упругой деформации элементов однородного покрытия рассматриваются линейно-деформируемое слоистое, композиционное, нелинейно-деформируемое слоистое и композиционное покрытия. Нелинейность моделируется как билинейной диаграммой Прандтля, так и степенной функцией, что выполняется впервые. Процесс разгрузки не рассматривается.

### **Список использованных источников**

1. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Применение простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины в механике твердого тела // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 1. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>
2. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Моделирование ползучести по наследственной теории в простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 2. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир. 1989. 510 с.