

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ПО НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ПОКРЫТИЯ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Кравчук Александр Степанович

д-р физ.-мат. наук

Кравчук Анжелика Ивановна

канд. физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. В статье на примере решения контактных задач ползучести предлагается обобщение модели основания Винклера на случай ползучести материала деформируемого покрытия. Использована наследственная теория ползучести. Рассматриваются вязкоупругое однородно стареющее однослойное, многослойное и композиционное покрытия, а также однослойные покрытия с нелинейной ползучестью. В частности, приведен пример решения контактной задачи структурно неоднородного вязкоупругого однородно стареющего композиционного материала, в состав которых входят как реологически стабильные, так и реологически активные материалы, что соответствует поведению композиций «полимер-металл». Процесс разгрузки внедряемых инденторов не рассматривается.

Ключевые слова: основание Винклера; вязкоупругий материал; нелинейная ползучесть материала; слоистый материал; композиционный материал.

SIMULATION ON CREEP BY HEREDITARY THEORY IN A SIMPLE MODEL OF CONSTANT THICKNESS DEFORMED COATING

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences

Kravchuk Anzhelica Ivanovna

candidate of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. We propose a generalization of solution of contact problem to the case of creep of Winkler foundation. It is used hereditary theory of creep. It is considered homogeneous viscoelastic aging monolayer, multilayer and composite coatings, as well as single-layer coatings with nonlinear creep. In particular, an example of a solution of the contact problem for inhomogeneous viscoelastic homogeneous aging composite material, which consists of both rheological stable and rheology active materials, which reflects the behavior of the compositions «polymer-metal» is solved. The unloading process is not considered.

Key words: Winkler base; viscoelastic material; nonlinear creep of the material; laminate material; composite material.

Введение. Изучение ползучести важно по ряду причин прикладного и принципиального характера. Так, действующие нагрузки нередко претерпевают в процессе работы некоторые изменения. Даже при постоянных нагрузках напряженное состояние тела, как правило, изменяется вследствие сглаживания первоначального поля напряжений [1].

Законы ползучести для разных материалов различны. Деформации ползучести, кроме изменения напряжений, очень чувствительны к небольшим изменениям температуры, составу и обработке исследуемого материала. Все это определяет характерный для теории ползучести большой разброс экспериментальных данных. При таком положении простые формулировки теории и приближенные решения следует предпочесть сложным, но по существу, лишь немного более точным формулировкам и решениям [2].

Первые практические методы расчета на ползучесть появившиеся в 20-х годах нашего века, характеризовались упрощенным подходом, и были не всегда теоретически обоснованы. Тогда были предложены физические зависимости между напряжениями и деформациями лежавших в основе теорий старения, течения и упрочнения [3].

Согласно теории старения, предложенной Содербергом, предполагается [4], что при заданной температуре между деформацией, напряжением и временем существует определенная зависимость (эта зависимость может также устанавливать связь между деформацией и напряжением в некоторой степени – нелинейная теория старения). Это предположение равносильно допущению о существовании, при заданной температуре поверхности, в системе координат напряжение-деформация-время. Рассекая эту поверхность плоскостями перпендикулярными некоторым соответствующим осям можно получить кривые ползучести при постоянном напряжении, кривые релаксации при постоянной деформации, графики зависимости напряжения от деформации для определенного значения температуры. Последние называются изохорными кривыми ползучести [4].

Согласно теории течения предполагается, что при заданной температуре между скоростью деформации ползучести в некоторой степени, напряжением и временем существует определенная зависимость. Эта

теория предложена Давенпортом [4] и получила довольно большое предположение благодаря работам Л.М. Качанова [2].

Теория упрочнения основана на предположении, что при заданной температуре между деформацией ползучести в некоторой степени, скоростью деформаций в той же степени и напряжением существует функциональная связь. Теория упрочнения была предложена Людвигом, Надаи и Давенпортом [4].

Простейшей наследственной теорией, в основе которой лежит принцип наложения (суперпозиции) деформаций, является линейная теория наследственности, предложенная Больцманом. Им были введены следующие гипотезы [3; 5]:

- упругие силы зависят не только от мгновенно полученных смещений, но и от предшествующих деформаций, которые оказывают меньшее влияние, чем больше времени прошло с этого момента;
- влияние полученных в разное время деформаций суммируется.

Исходя из этого описание изменения деформации (напряжения) во времени описывается соответствующими интегральными операторами Вольтерра.

В настоящее время наследственная теория является основной теорией, применяемой при расчетах твердых тел с учетом ползучести. Следует отметить, что стремление наиболее полно отразить процессы деформирования различных материалов во времени вызвало разработку нелинейных вариантов теории наследственности [4; 6].

Теория ползучести в дальнейшем развивалась по пути усложнения свойств отдельных элементов моделей, а также при рассмотрении свойств учитывалась их переменность во времени [7].

Основные гипотезы, используемые в построении простейшей наследственной реологической модели деформируемого покрытия постоянной толщины. Предполагается, что поверхность покрытия плоская. Это значит, что отклонения поверхности малы в сравнении с глу-

биной внедрения индентора [8]. Покрытие лежит на гладком недеформируемом полупространстве (Рис. 1).

Сила величиной $P(t)$ не убывает при $t \in [0, t_0]$, где t_0 – длительность испытаний на ползучесть. Она действует на абсолютно жесткий индетор вертикально вниз вдоль оси Z (Рис. 1). Все линейные размеры области контакта $S(t)$ при действии силы $P(t)$ не уменьшаются, т.е. если выбраны два любых значения времени t_1 и t_2 , такие что $t_1 < t_2$, то:

$$S(t_1) \subseteq S(t_2). \quad (1)$$

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями с постоянным квадратным сечением $\Delta \times \Delta$ в плоскости X0Y и высотой h (Рис. 1). Стержни могут перемещаться только в Z-направлении, при этом их напряженно-деформированное состояние является однородным [1; 8]. Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с наименьшим характерным размером область контакта на плоскости X0Y (Рис. 1).

При ползучести предполагается, что деформации происходят так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая [2; 4], т.е. масса-инерционные характеристики призматических стержней (Рис. 1) не оказывают влияния на характер его деформирования. Рассматривается установившаяся ползучесть стержня. Время внедрения пирамидального индентора на глубину $\delta(0)$ (Рис. 1) пренебрежимо мало по сравнению со временем измерений. Это позволяет предположить, что $\delta(0)$ является мгновенной величиной.

В соответствии с наследственной теорией ползучести для единичного призматического стержня из одного однородного материала, подверженного одноосному сжатию, будем рассматривать два типа уравнений состояния:

1. Вязко-упругий однородно стареющий материал [3; 7]:

$$\varepsilon_z(t) = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma_z(t) + \int_0^t \sigma_z(\tau) \cdot \Gamma(t, \tau) d\tau \right], \quad (2)$$

где $\varepsilon_z(t)$ – полная деформация стержня; $E(t)$ – мгновенный модуль упругости материала [7], $\Gamma(t, \tau)$ – ядро ползучести материала.

2. Материал, обладающий свойствами нелинейной ползучести [2; 3; 6]:

$$\mathfrak{Z}(\varepsilon_z(t)) = \sigma_z(t) + \int_0^t \sigma_z(\tau) \cdot \Gamma(t, \tau) d\tau, \quad (3)$$

где $\mathfrak{Z}(\cdot)$ – некоторая нелинейная функция.

Виды нелинейности. При дальнейших исследованиях будем различать материалы, у которых нелинейная функция $\mathfrak{Z}(\cdot)$ (10) определяется билинейной диаграммой Прандтля [8]:

$$\mathfrak{Z}(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon, & 0 \geq \varepsilon > \frac{\sigma_{\text{эм}}^{\text{сж}}}{E}, \\ \sigma_{\text{эм}}^{\text{сж}} + E_{\text{эм}}^{\text{сж}} \cdot \left(\varepsilon - \frac{\sigma_{\text{эм}}^{\text{сж}}}{E} \right), & \frac{\sigma_{\text{эм}}^{\text{сж}}}{E} \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

и степенной функцией:

$$\mathfrak{Z}(\varepsilon) = \sigma_{\text{эм}}^{\text{сж}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{эм}}^{\text{сж}}} \right)^{\alpha^{\text{сж}}}, \quad (5)$$

где E , $E_{\text{эм}}^{\text{сж}}$, $\sigma_{\text{эм}}^{\text{сж}}$, $\varepsilon_{\text{эм}}^{\text{сж}}$, $\alpha^{\text{сж}}$ ($\alpha^{\text{сж}} < 1$) – характерные для материала константы, определяемые исходя из аппроксимации с помощью (3) и (4) или (3) и (5) диаграммы ползучести при одноосном сжатии образца материала. Отметим, что константы $\sigma_{\text{эм}}^{\text{сж}}$, $\varepsilon_{\text{эм}}^{\text{сж}}$ в (4) и (5) всегда отрицательные, т.к. при решении контактной задачи всегда происходит сжатие стержней из простейшей модели деформируемого покрытия.

Очевидно, если сделать зависящими от времени все коэффициенты нелинейной функции $\mathfrak{Z}(\cdot)$ в (4) или (5) (т.е. рассматривать $E(t)$, $\sigma_{\text{эм}}^{\text{сж}}(t)$, $E_{\text{эм}}^{\text{сж}}(t)$ в (4) или $\sigma_{\text{эм}}^{\text{сж}}(t)$, $\varepsilon_{\text{эм}}^{\text{сж}}(t)$, $\alpha^{\text{сж}}(t)$ в (5)), то можно изучать однородное старение более широкого круга материалов с помощью (3), чем простое однородное старение бетона и полимеров с помощью (2) [3; 7].

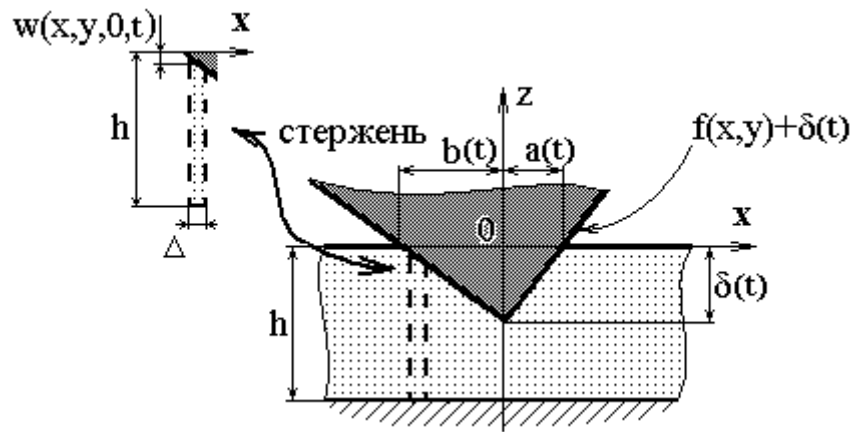


Рис. 1. Внедрение криволинейного индентора в простейшую модель деформируемого покрытия

Краевое условие по перемещениям. В рамках модельных задач механики контактного взаимодействия внедряемое в покрытие тело является недеформируемым, т.е. жестким штампом. Пусть открытая область $S(t) \subset X0Y$ является внутренностью области контакта, т.е. $S(t) = \{(x, y) | \sigma_z(x, y, 0, t) \neq 0, t \in [0, t_0]\}$, где $\sigma_z(x, y, 0, t)$ – контактные напряжения. Тогда замыкание $\overline{S(t)}$ является областью контакта. Учитывая, что в рамках простейшей модели деформируемого покрытия контактные напряжения $\sigma_z(x, y, 0, t) \neq 0$ могут возникнуть только в точке, в которой перемещение в области контакта $w(x, y, 0, t) \neq 0$, то внутренность области контакта гораздо проще определить как $S(t) = \{(x, y) | w(x, y, 0, t) \neq 0, t \in [0, t_0]\}$.

Пусть уравнение поверхности внедряемого недеформируемого штампа описывается уравнением $f(x, y)$, и точка $(0, 0, 0)$ является точкой первичного касания штампа и плоскости $X0Y$ [1].

Тогда краевое условие по перемещениям определяется следующим уравнением:

$$w(x, y, 0, t) = \begin{cases} f(x, y) + \delta(t), & (x, y) \in \overline{S(t)}, \\ 0, & (x, y) \notin \overline{S(t)}. \end{cases} \quad (6)$$

где $\delta(t)$ – глубина максимального внедрения штампа. Она определяется из геометрических соображений, т.е. на границе области контакта $(x, y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)$ контактные перемещения равны нулю ($w(x, y, 0, t)|_{(x, y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)} = 0$).

Принимая во внимание верхнее уравнение (6), окончательно получаем, что для любой достоверно определенной точки с границы области контакта $(x, y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)$ выполнено равенство:

$$\delta(t) = -f(x, y)|_{(x, y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)}. \quad (7)$$

Уравнения равновесия штампа на границе с учетом временных эффектов имеет вид:

$$P(t) = - \iint_{\overline{S(t)}} \sigma_z(x, y, 0, t) dx dy \quad (8)$$

Цель решения задач с учетом вязких свойств покрытия. При решении реологических задач для покрытий конечной толщины необходимо определить функцию изменения максимальной глубины внедрения недеформируемого индентора $\delta(t)$ (7) по заданным геометрическим размерам и форме самого индентора, заданным реологическим характеристикам исследуемого покрытия и заданной неубывающей функции, действующей на индентор нагрузки $P(t)$.

Способ достижения цели. Рассмотрим две простейших модели однослойных деформируемых покрытий, уравнение состояний стержней которых определяется уравнениями (2) и (3). Очевидно, что переходя к области контакта $\overline{S(t)}$, получаем следующие уравнения $\forall (x, y) \in \overline{S(t)}$ в случае простейшей модели деформируемого покрытия:

1. Вязко-упругий однородно стареющий материал:

$$\varepsilon_z(x, y, 0, t) = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma_z(x, y, 0, t) + \int_0^t \sigma_z(x, y, 0, \tau) \Gamma(t, \tau) d\tau \right]. \quad (9)$$

2. Материал, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$\mathfrak{I}(\varepsilon_z(x, y, 0, t)) = \sigma_z(x, y, 0, t) + \int_0^t \sigma_z(x, y, 0, \tau) \cdot \Gamma(t, \tau) d\tau. \quad (10)$$

Ключевой гипотезой при проведении дальнейших вычислений является гипотеза (1) о неубывании всех размеров области контакта со временем [1; 5; 9]. Она позволяет при интегрировании выражений типа (9) и (10) по области контакта $\overline{S(t)}$ менять порядок интегрирования во втором слагаемом правой части этих уравнений с порядка «по времени, потом

по координатам» на порядок «по координате, потом времени» и с помощью уравнения (8) получать следующие типовые уравнения для определения $\delta(t)$:

1. Вязко-упругий однородно стареющий материал:

$$\iint_{\bar{s}(t)} \varepsilon_z(x, y, 0, t) dx dy = -\frac{1}{E(t)} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \Gamma(t, \tau) d\tau \right). \quad (11)$$

2. Материал, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$\iint_{\bar{s}(t)} \mathfrak{Z}(\varepsilon_z(x, y, 0, t)) dx dy = -\left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \Gamma(t, \tau) d\tau \right). \quad (12)$$

В уравнениях (11) и (12) при постановке задачи по входным данным должны быть полностью определены их правые части, а также нелинейная функция $\mathfrak{Z}(\cdot)$ (12). Кроме того используется следующее очевидное уравнение механики простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины:

$$\varepsilon_z(x, y, 0, t) = \frac{w(x, y, 0, t)}{h} = \frac{f(x, y) + \delta(t)}{h}. \quad (13)$$

Исходя из (11) и (13) (или (12) и (13)) вначале определяется выражение какого-либо геометрического размера области контакта через правую часть (11) или (12). После этого осуществляется подстановка выражения для упомянутого геометрического размера области контакта через глубину погружения индентора $\delta(t)$, определяемого с помощью (5).

Непосредственно в качестве примера определим уравнения изменения внедрения параболического цилиндра в вязкоупругий однородно стареющий слой (9) (двумерная задача) и параболоида в слой, материал которого обладает нелинейной ползучестью (10) в виде степенной функции.

Решение двумерной задачи о внедрении параболического цилиндра в однослойное вязкоупругое однородно стареющее покрытие. В этом случае $f(x, y) = \frac{x^2}{2R}$ (6). Из (7) следует, что $\delta(t) = -\frac{a(t)^2}{2R}$ [8]. Со-

ответственно из (9) и (11) следует уравнение определяющее размеры области контакта $a(t)$:

$$\int_0^\ell \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{(x^2 - a(t)^2)}{h} dx dy = -\frac{1}{E(t)} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \Gamma(t, \tau) d\tau \right). \quad (14)$$

Непосредственно интегрируя (14), используя упомянутое уравнение $a(t) = \sqrt{2R \cdot (-\delta(t))}$ и полагая $\ell = 1$, получаем заключительное уравнение:

$$\delta(t) = -\frac{1}{2R} \left[\frac{3h}{4E(t)} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \Gamma(t, \tau) d\tau \right) \right]^{\frac{2}{3}} \quad (15)$$

Определение погружения параболоида в покрытие, обладающее нелинейной ползучестью. В этом случае $f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2R} = \frac{r^2}{2R}$. Из (6)

и (7) следует, что $\delta(t) = -\frac{a(t)^2}{2R}$ [8]. Соответственно из (12) и (13) следует уравнение, определяющее размеры области контакта $a(t)$:

$$2\pi \cdot \int_0^{a(t)} \mathfrak{Z} \left(\frac{(r^2 - a(t)^2)}{2Rh} \right) r dr = - \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \Gamma(t, \tau) d\tau \right). \quad (16)$$

В случае, когда $\mathfrak{Z}(\cdot)$ является нелинейной функцией вида (5), с использованием упомянутого уравнения $a(t) = \sqrt{2R \cdot (-\delta(t))}$, получаем заключительное уравнение для численного определения значений $\delta(t)$ при заданном времени t :

$$2\pi \cdot \sigma_{sm} \int_0^{\sqrt{2R \cdot (-\delta(t))}} \left(\frac{(r^2 + 2R \cdot \delta(t))}{2R \cdot h \cdot \varepsilon_{sm}} \right)^\alpha r dr = - \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \Gamma(t, \tau) d\tau \right). \quad (17)$$

Горизонтально слоистое вязкоупругое покрытие постоянной толщины. Перейдем к рассмотрению горизонтально-слоистого покрытия постоянной толщины [8]. Для этого рассмотрим деформацию многослойного призматического стержня размером $\Delta \times \Delta \times h$ с координатами (x, y) на плоскости XOY , имитирующего деформацию покрытия в этой точке. Рассмотрим горизонтально-слоистый стержень не более чем из N слоев [8]. При этом k -ый слой ($k = \overline{1, N}$) имеет высоту h_k , мгновенный модуль упругости $E_k(t)$ и ядро ползучести $\Gamma_k(t, \tau)$ для материала каждого слоя (Рис. 2).

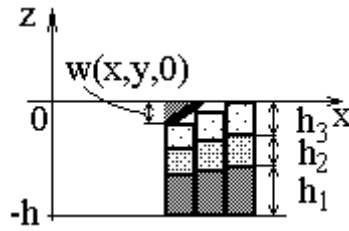


Рис. 2. Схема нагружения горизонтально-слоистого стержня

Напряжения $\sigma_z(x, y, 0, t)$, действующие в области контакта $\overline{S(t)}$ на весь стержень с координатами $(x, y) \in \overline{S(t)}$ (Рис. 1, 2), равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство $\sigma_z(x, y, 0, t) = \sigma_z\left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i, t\right) = \sigma_{z,k}(x, y, 0, t) \quad \forall k = \overline{1, N}$. Следуя методике, изложенной в [8], из (9) получаем следующие уравнения для деформации $\varepsilon_{z,k}(x, y, 0, t)$ отдельного слоя с номером $(k = \overline{1, N})$ и координатами $(x, y) \in S$ при сжатии (Рис. 2):

$$\varepsilon_{z,k}(x, y, 0, t) = \varepsilon_z\left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i, t\right) = \frac{1}{E_k(t)} \left(\sigma_z(x, y, 0, t) + \int_0^t \sigma_z(x, y, 0, \tau) \cdot \Gamma_k(t, \tau) d\tau \right). \quad (18)$$

Определим суммарные перемещения $w(x, y, 0, t)$ в Z -направлении для всего многослойного стержня с координатами $(x, y) \in \overline{S(t)}$ суммированием (18) для $k = \overline{1, N}$ [8]:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0, t) &= \sum_{k=1}^N w_k\left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i, t\right) = \sum_{k=1}^N h_k \cdot \varepsilon_{z,k}(x, y, 0, t) = \\ &= \frac{h}{\langle E(t) \rangle_P} \left(\sigma_z(x, y, 0, t) + \int_0^t \sigma_z(x, y, 0, \tau) \cdot \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P d\tau \right). \end{aligned} \quad (19)$$

где эффективный мгновенный модуль упругости $\langle E(t) \rangle_P$ и эффективное ядро ползучести $\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P$ горизонтально-слоистого призматического стержня определяются уравнениями:

$$\langle E(t) \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right)^{-1}, \quad \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P = \langle E(t) \rangle_P \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \cdot \Gamma_k(t, \tau)}{E_k(t)}. \quad (20)$$

Необходимо (17) проинтегрировать по $\overline{s(t)}$ и получить уравнение для определения $\delta(t)$ аналогичное (9) с учетом эффективных коэффициентов (20):

$$\iint_{\overline{s(t)}} \varepsilon_z(x, y, 0, t) dx dy = -\frac{1}{\langle E(t) \rangle_P} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P d\tau \right). \quad (21)$$

Исходя из (13) и (21) получаем, что при внедрении параболического цилиндра в слоистое покрытие в решении (13) (плоская задача) мгновенный модуль упругости и ядро ползучести однослойного покрытия необходимо заменить на эффективный модуль $\langle E(t) \rangle_P$ и эффективное ядро ползучести $\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P$ многослойного покрытия (20):

$$\delta(t) = -\frac{1}{2R} \left[\frac{3h}{4 \cdot \langle E(t) \rangle_P} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P d\tau \right) \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (22)$$

Композиционное структурно неоднородное покрытие. Перейдем к моделированию деформирования вязкоупругого композиционного покрытия. В соответствии с методикой, изложенной в работе [5; 8]. Для решения задачи определения эффективных параметров рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в твердом теле, т.е. в данном случае рассматривается сжатие призматических стержней, находящихся под внедряемым штампом (Рис. 1).

Принцип реализации метода гомогенизации для призматического стержня квадратного сечения из простейшей модели деформируемого покрытия (Рис. 1) заключается в следующем: если армированный материал состоит из N компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование и т.п.), то можно использовать гипотезу Фойгта для призматического стержня о том, что в простейших опытах на чистое растяжение/сжатие предполагается, что деформации по всему объему композиционного материала призматического стержня постоянны. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что в тех же простейших экспериментах на растяжение/сжатие

предполагается, что напряжения по всему объему композиционного материала призматического стержня постоянны.

Полученные на основании этих гипотез формулы, имеют практическую ценность, так как являются соответственно верхней и нижней оценкой истинных модулей композиционного материала [5].

Предполагается, что значения объемных долей γ_k ($k = \overline{1, N}$) (концентраций) компонент композиционного покрытия известны для покрытия в целом, и они же являются объемными долями компонент для каждого из стержней. При усреднении упругих характеристик композиционного материала стержня предполагается, что мгновенный модуль упругости $E_k(t)$ и ядро ползучести $\Gamma_k(t, \tau)$ известны для материала каждой компоненты k ($k = \overline{1, N}$).

Применение гипотезы Фойгта для вычисления эффективных коэффициентов материала из N компонент для призматического стержня. В данном случае следует решить задачу усреднения параметров материалов, исходя из простого сжатия вертикально-слоистого призматического стержня (Рис. 3), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородной деформации всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению. Более того, данная расчетная схема, очевидно, позволяет рассмотреть вертикально-слоистый стержень не более чем из N слоев. При этом k -ый вертикальный слой ($k = \overline{1, N}$) имеет ширину, например, вдоль X – направления $\Delta_k = \gamma_k \cdot \Delta$, а вдоль Y- направления Δ (Рис. 4). Очевидно, что направления X и Y равнозначны, поэтому полученные далее результаты не зависят от их перестановки.

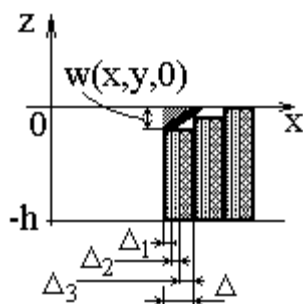


Рис. 3. Схема нагружения вертикально-слоистого стержня

Усредним вязкоупругие характеристики вертикально-слоистого однородно стареющего стержня. Деформации $\varepsilon_z(x, y, 0, t)$, действующие в области контакта $\overline{S(t)}$ при фиксированном времени t на весь стержень с координатами $(x, y) \in \overline{S(t)}$ (Рис. 3), равны соответствующим деформациям, действующим на все его вертикальные слои, т.е. в это же время t выполнено равенство

$$\varepsilon_z(x, y, 0, t) = \varepsilon_z \left(\left(x - \frac{\Delta}{2} + \sum_{i=1}^k \Delta_i \right), y, 0, t \right) = \varepsilon_{z,k}(x, y, 0, t) = \frac{w(x, y, 0, t)}{h}$$

$\forall k = \overline{1, N}$. Следуя методике, изложенной в [8] из (9), можем получить следующее выражение

$$E_k(t) \cdot \varepsilon_z(x, y, 0, t) = \sigma_{z,k}(x, y, 0, t) + \int_0^t \sigma_{z,k}(x, y, 0, \tau) \cdot \Gamma_k(t, \tau) d\tau \quad (23)$$

Интегрируем обе части (23) по области контакта $\overline{S(t)}$, домножая результат на γ_k и затем суммируя полученное выражение по k ($k = \overline{1, N}$), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \langle E(t) \rangle_\phi \cdot \iint_{\overline{S(t)}} \varepsilon_z(x, y, 0, t) dx dy &= \iint_{\overline{S(t)}} \langle \sigma_z(x, y, 0, t) \rangle dx dy + \\ &+ \int_0^t \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \iint_{\overline{S(\tau)}} \sigma_{z,k}(x, y, 0, \tau) dx dy \cdot \Gamma_k(t, \tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\langle E(t) \rangle_\phi = \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k(t), \quad \langle \sigma_z(x, y, 0, t) \rangle = \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \sigma_{z,k}(x, y, 0, t) \quad (25)$$

Заметим, что аналогично (8) для средних контактных напряжений $\langle \sigma_z(x, y, 0, t) \rangle$ выполнено равенство:

$$P(t) = - \iint_{\overline{S(t)}} \langle \sigma_z(x, y, 0, t) \rangle dx dy. \quad (26)$$

Тогда из (25) и (26) можно сделать предположение, что для любого времени τ (где $\tau \in [0, t]$) с достаточной точностью выполнено:

$$\iint_{\overline{S(\tau)}} \sigma_{z,k}(x, y, 0, \tau) dx dy \approx - \frac{P(\tau)}{\gamma_k \cdot N}. \quad (27)$$

Из (24), (26), (27) следует

$$\iint_{\overline{S(t)}} \varepsilon_z(x, y, 0, t) dx dy = - \frac{1}{\langle E(t) \rangle_\phi} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\phi d\tau \right). \quad (28)$$

где

$$\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Gamma_k(t, \tau). \quad (29)$$

Вычисление эффективных реологических параметров структурно неоднородного композиционного материала покрытия следа Хиллу. Окончательно можно записать уравнение состояния и эффективные параметры структурно неоднородного в среднем изотропного вязкоупругого однородно стареющего покрытия (20), (25), (29):

$$\varepsilon_z(x, y, 0, t) = \frac{1}{\langle E(t) \rangle_X} \left[\sigma_z(x, y, 0, t) + \int_0^t \sigma_z(x, y, 0, \tau) \cdot \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right], \quad (30)$$

где

$$\langle E(t) \rangle_X = \frac{1}{2} (\langle E(t) \rangle_P + \langle E(t) \rangle_{\phi}) = \frac{1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k(t) \right) \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)}}{2 \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)}}, \quad (31)$$

$$\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X = \frac{1}{2} (\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P + \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_{\phi}) = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \cdot \Gamma_k(t, \tau)}{E_k(t)}}{2 \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)}} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Gamma_k(t, \tau).$$

Вычисление эффективных свойств металло-полимерного покрытия сводятся к тому, что если положить, что $k=1$ для свойств металла, то мгновенный модуль упругости $E_1(t)$ будет константой E_1 , а ядро ползучести при коэффициенте концентрации металла γ_1 в формулах (30).

Определение глубины внедрения параболоида в композиционное покрытие. В случае осесимметричной задачи $f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2R} = \frac{r^2}{2R}$.

Из (6) и (7) следует, что $\delta(t) = -\frac{a(t)^2}{2R}$ [8]. Будем предполагать, что композиция состоит из двух материалов:

- металла с объемной долей γ_1 , с мгновенным модулем упругости, не меняющимся во времени $E_1(t) = E_1$ и ядром ползучести равным нулю $\Gamma_1(t, \tau) = 0$;

- полимера с объемной долей γ_2 , с переменным мгновенным модулем упругости $E_2(t)$ и ядром ползучести $\Gamma_2(t, \tau) = 0$.

Соответственно, из (11), (30), (31) следует уравнение определяющее размеры области контакта $a(t)$:

$$\frac{\pi}{Rh} \cdot \int_0^{a(t)} (r^2 - a(t)^2) \cdot r dr = -\frac{1}{\langle E(t) \rangle_X} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right). \quad (32)$$

где

$$\langle E(t) \rangle_X = \frac{1}{2} (\langle E(t) \rangle_P + \langle E(t) \rangle_\Phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{E_1 \cdot E_2(t)}{\gamma_1 \cdot E_2(t) + \gamma_2 \cdot E_1} + (\gamma_1 \cdot E_1 + \gamma_2 \cdot E_2(t)) \right),$$

$$\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X = \frac{1}{2} \Gamma_2(t, \tau) + \frac{1}{2} \Gamma_2(t, \tau) = \Gamma_2(t, \tau).$$

С использованием упомянутого уравнения $a(t) = \sqrt{2R \cdot (-\delta(t))}$, из (32) получаем заключительное уравнение для определения значений $\delta(t)$ при внедрении параболоида в металло-полимерное покрытие:

$$\delta(t) = -\sqrt{\frac{h}{\pi R} \frac{2}{\left(\frac{E_1 \cdot E_2(t)}{\gamma_1 \cdot E_2(t) + \gamma_2 \cdot E_1} + (\gamma_1 \cdot E_1 + \gamma_2 \cdot E_2(t)) \right)} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \Gamma_2(t, \tau) d\tau \right)}$$

Выводы. К сожалению, формулировка ползучести стержней в виде наследственного уравнения (3) с нелинейностями (4) и (5) не позволяет применить методику, разработанную в (8), и получить оценочное решение, как для слоистых, так и композиционных в среднем изотропных тел.

Если сделать зависящими от времени все коэффициенты нелинейной функции $\mathfrak{Z}(\cdot)$ в (4) или (5) (т.е. рассматривать $E(t)$, $\sigma_{эм}^{сж}(t)$, $E_{эм}^{сж}(t)$ в (4) или $\sigma_{эм}^{сж}(t)$, $\varepsilon_{эм}^{сж}(t)$, $\alpha^{сж}(t)$ в (5)), то можно изучать однородное старение более широкого круга материалов с помощью (3), чем простое однородное старение бетона и полимеров с помощью (2) [3; 7].

Приведен пример решения контактной задачи о внедрении параболоида в вязкоупругое композиционное покрытие, в состав которого входят как реологически стабильные, так и реологически активные материалы, что соответствует поведению композиций «полимер-металл».

Список использованных источников

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
2. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. 456 с.
3. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М: Стройиздат, 1968. 418 с.
4. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
5. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Минск: Технопринт, 2000. 196 с.
6. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
7. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Институт механики НАН Армении, 1999. 320 с.
8. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Применение простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины в механике твердого тела // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 1. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>
9. Рущицкий Я.Я. Об одной контактной задаче плоской теории вязкоупругости // Прикл. мех. 1966. Т. 3. Вып. 12. С. 55-63.