ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ ВОЛНОВОГО ФРОНТА В КОМПОЗИЦИОННОЙ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ИСХОДЯ ИЗ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Кравчук Александр Степанович
доктор физико-математических наук
Кравчук Анжелика Ивановна
кандидат физико-математических наук
Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

Аннотация. На основе методики, разработанной и примененной авторами ранее при анализе уравнений распространения тепла и диффузии в композиционных средах, получена оценка средней скорости перемещения волнового фронта в композиционном пространстве, в зависимости от концентраций (объемных долей) компонент и средних значений скорости перемещения волнового фронта по Фойгту и Рейссу. Волновое уравнение для однородной среды обобщено на случай композиционной структурно неоднородной среды.

Ключевые слова: скорость волнового фронта, волновое уравнение, композиционная среда, объемные доли компонент.

CALCULATION OF VELOCITY OF WAVE FRONT IN COMPOSITE STRUCTURAL HETEROGENEITY ENVIRONMENT BASED ON THE WAVE EQUATION

Kravchuk Alexander Stepanovich
doctor of physical and mathematical sciences
Kravchuk Anzhelica Ivanovna
candidate of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. An estimation of the average velocity of the wave front in the composite space, depending on the concentration (volume fraction) of components and the Voigt and Reuss average values of the velocity of the wave front. The wave equation for a homogeneous medium is generalized to the case of composite structurally inhomogeneous environments.

Keywords: velocity of the wave front, wave equation, composite media, the volume fractions of the components.

Введение. Одним из наиболее распространенных уравнений в физике является волновое уравнение для однородной среды. С помощью его можно провести анализ скорости перемещения волнового фронта в однородной среде [1-3].

В данной работе этот теоретический результат обобщен на случай неоднородной среды, которая состоит из смеси компонент с заданными концентрациями.

Отметим, что формальное соответствие общего вида волнового уравнения и частных случаев уравнений колебания струны и мембраны ни к чему не обязывает, т.к. при классическом выводе волнового уравнения используется предположение о существовании волнового фронта, а в уравнениях поперечных колебаний волновой фронт отсутствует. Поэтому даже качественное сравнение этих уравнений и процессов не корректно.

Таким образом, общеизвестное волновое уравнение – это уравнение определения скорости волнового фронта, например, для продольной волны или света.

Обобщенный вывод волнового уравнения для распространения плоской продольной волны вдоль пространственной гладкой кривой в однородной среде. Будем рассматривать трехмерное пространство с осями $0x_1$, $0x_2$, $0x_3$. Пусть [1-3] $d(x,t)$ возмущение в точке с координатами $x=(x_1,x_2,x_3)$ и временем t тела, занимающего объем V. Рассмотрим произвольную кривую линию $\Omega(x)$ с касательным единичным касательным вектором $\vec{n}(x)$ и единичным вектором нормали $\vec{N}(x)$.

Уравнение плоской волны будем рассматривать на двумерной криволинейной поверхности, образованной векторами $\vec{n}(x)$ и $\vec{N}(x)$. Будем предполагать, что рассматриваемая точка $\vec{r}(x)$ объема V является центром элементарного объема $dV = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$, где dx_i - малые приращения вдоль осей $0x_i$ $(i=\overline{1,3})$, такие, что при этом $\forall x \in dV$ вектора $\vec{n}(x)$ и

$\vec{N}(x)$ являются векторами константами, при этом, $\vec{n}(x)=(n_1,n_2,n_3)$ и по предположению $n_1{}^2+n_2{}^2+n_3{}^2=1$.

Уравнение плоской волны в плоскости определенной векторами константами, для элементарного объема можно записать в виде:

$$d(x,t)=A\cdot\cos\left(\omega\cdot t-k\cdot\left(\vec{n},\vec{r}\right)+\varphi_0\right), \tag{1}$$

где A – амплитуда волны, $\omega=2\pi\cdot\nu$ – круговая частота, ν – частота, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, $\left(\vec{n},\vec{r}\right)$ – скалярное произведение векторов, φ_0 – начальная фаза колебаний.

Очевидно, что размеры элементарного объема dV и кривая $\Omega(x)$ должны быть такими, что размеры плоскости, определяемой приближенно в элементарном объеме векторами $\vec{n}(x)$ и $\vec{N}(x)$, были не меньше чем $A\times\lambda$.

Далее дважды дифференцируем (1) по всем переменным по очереди [1-3]:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}=-\omega^2\cdot A\cdot\cos\left(\omega\cdot t-k\cdot\left(\vec{n},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)=-\omega^2\cdot d(x,t) \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x_i{}^2}=-(k\cdot n_i)^2\cdot A\cdot\cos\left(\omega\cdot t-k\cdot\left(\vec{n},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)=-(k\cdot n_i)^2\cdot d(x,t)\ \ (i=\overline{1,3}).$$

Складывая последние три уравнения из системы (2), получаем:

$$\Delta d=-k^2\cdot d(x,t), \tag{3}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Сравнивая первое уравнение (2) и (3), получаем итоговое волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta d \,. \tag{4}$$

где $v = \lambda / \nu$.

Гипотезы композиционной среды. Будем называть представительным объемом композиционной среды наименьший объем, в котором физические характеристики остаются в среднем равными физическим характеристикам всего объема среды.

Будем предполагать, что любой выделенный нами представительный объем dV мал по сравнению с общим объемом рассматриваемого композиционного тела V. Пусть среда состоит из n компонент с различной скоростью распространения волны v_m, где m – номер компоненты для рассматриваемого материала. И во всем объеме тела, и в элементарном объеме dV концентрации компонент (объемные доли) равны γ_m (где m $(m = \overline{1,n})$ – номер компоненты, при этом выполнено условие нормировки $\sum_{m=1}^{n} \gamma_m = 1$).

Уравнение плоской волны в плоскости, определенной векторами константами, для m-ой компоненты представительного объема композиционного материала. По аналогии с (1) можно записать:

$$d_m(x,t) = A_m \cdot \cos\left(\omega_m \cdot t - k_m \cdot \left(\vec{n}, \vec{r}\right) + \varphi_{0,m}\right), \tag{5}$$

где A_m – амплитуда волны, $\omega_m = 2\pi \cdot \nu_m$ – круговая частота, ν_m – частота, $k_m = 2\pi / \lambda_m$ – волновое число, λ_m – длина волны, $\varphi_{0,m}$ – начальная фаза колебаний для m-ой компоненты композиционного материала, находящегося в точке $x \in dV$ с вероятностью γ_m.

Далее дважды дифференцируем (5) и, повторяя действия (2)-(4), получаем итоговое волновое уравнение для m-ой компоненты композиционного материала:

$$\frac{\partial^2 d_m}{\partial t^2} = v_m{}^2 \cdot \Delta d_m. \tag{6}$$

где $v_m = \lambda_m / \nu_m$.

Оценка Фойгта. Согласно гипотезе Фойгта будем считать, что $\Delta d_m(x,t)$ является непрерывной функцией во всем представительном объеме [4; 5], т.е. существует такая непрерывная функция $\Delta d(x,t)$, что для любого номера m ($m = \overline{1,n}$) выполнено:

$$\Delta d_m(x,t) = \Delta d(x,t). \tag{7}$$

Домножая (6) с учетом (7) на γ_m и суммируя по m, получаем:

$$\left\langle \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \right\rangle_V = \langle v \rangle_V{}^2 \cdot \langle \Delta d \rangle_V, \tag{8}$$

где

$$\left\langle \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \right\rangle_V = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \cdot \frac{\partial^2 d_m}{\partial t^2}, \qquad \langle v \rangle_V = \sqrt{\sum_{m=1}^{n} \gamma_m \cdot v_m{}^2}, \tag{9}$$

$$\langle \Delta d \rangle_V = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \cdot \Delta d = \Delta d.$$

Оценка Рейсса. Согласно гипотезе, аналогичной гипотезе Рейсса, будем считать, что $\frac{\partial^2 d_m}{\partial t^2}$ является непрерывной функцией во всем представительном объеме [4, 5], т.е. существует такая непрерывная функция $\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}$, что для любого номера m ($m = \overline{1,n}$) компоненты композиционной среды выполнено, что ускорение частиц внутри представительного объема не зависят от компоненты композиционного материала:

$$\frac{\partial^2 d_m}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}. \tag{10}$$

Домножая (6) с учетом (10) на γ_m и суммируя по m, получаем:

$$\left\langle \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \right\rangle_R = \langle v \rangle_R{}^2 \cdot \langle \Delta d \rangle_R, \tag{11}$$

где

$$\left\langle \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \right\rangle_R = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \cdot \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}, \qquad \langle v \rangle_R = \sqrt{\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\gamma_m}{v_m{}^2} \right)^{-1}}, \tag{12}$$

$$\langle \Delta d \rangle_R = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \cdot \Delta d_m.$$

Построение оценки эффективных коэффициентов для волнового уравнения в смысле средних значений по реализации композиционной среды. Будем предполагать [4, 5], что:

$$\frac{\partial^2\langle d\rangle}{\partial t^2} = \alpha\cdot\left\langle\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}\right\rangle_V + (1-\alpha)\cdot\left\langle\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}\right\rangle_R \tag{13}$$

$$\Delta\langle d\rangle \approx \langle\Delta d\rangle_R \approx \langle\Delta d\rangle_V .$$

Тогда, из (8), (11) и (13) получаем:

$$\frac{\partial^2\langle d\rangle}{\partial t^2} \approx \left(\alpha\cdot\langle v\rangle_V{}^2 + (1-\alpha)\cdot\langle v\rangle_R{}^2\right)\cdot\Delta\langle d\rangle \tag{14}$$

Далее предположим наоборот [4, 5], что:

$$\frac{\partial^2\langle d\rangle}{\partial t^2} \approx \left\langle\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}\right\rangle_V \approx \left\langle\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}\right\rangle_R , \tag{15}$$

$$\Delta\langle d\rangle = \alpha\cdot\langle\Delta d\rangle_V + (1-\alpha)\cdot\langle\Delta d\rangle_R .$$

Из (8), (11) и (15) получаем:

$$\frac{\partial^2\langle d\rangle}{\partial t^2} \approx \left(\frac{\alpha}{\langle v\rangle_V{}^2} + \frac{(1-\alpha)}{\langle v\rangle_R{}^2}\right)^{-1} \Delta\langle d\rangle . \tag{16}$$

Выбирая среднее арифметическое значение между коэффициентами уравнений (14) и (16) и, интегрируя его по α на интервале $[0,1]$, получаем результирующее значение по Кравчуку-Тарасюку средней скорости волны, преодолевающей структурно неоднородную композиционную среду:

$$\langle v\rangle_{K-T} = \sqrt{\frac{\langle v\rangle_V{}^2 + \langle v\rangle_R{}^2}{4} + \frac{\langle v\rangle_V{}^2\langle v\rangle_R{}^2}{\langle v\rangle_R{}^2 - \langle v\rangle_V{}^2}\cdot\ln\left(\frac{\langle v\rangle_R}{\langle v\rangle_V}\right)} .$$

Выводы. На основе методики, разработанной и примененной авторами при анализе уравнений распространения тепла [4] и диффузии [5], получена оценка средней скорости распространения волны в композиционном пространстве.

Список использованных источников

1. Ядерная физика в Интернете [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://nuclphys.sinp.msu.ru
2. Лекции по физике [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://physics-lectures.ru
3. Wikipedia свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://ru.wikipedia.org
4. Кравчук А.С., Кравчук А.И., Тарасюк И.А. Методика вычисления эффективных коэффициентов в уравнении теплопроводности композиционного тела // Вестник СпбГУ. 2016. Серия 4. Т. 2 (60). Вып. 4. С. 335-341.
5. Кравчук А.С., Кравчук А.И., Попова Т.С. Уравнение диффузии композиционной смеси в композиционную среду // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 4. С. 1041-1046.