

УДК 519.72

ПРИМЕНЕНИЕ ПОВТОРЯЮЩЕГОСЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТЕКЛОВА ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА ИЗ СМЕСИ С МНОГОКРАТНО ПРЕВОСХОДЯЩИМ ПО МОЩНОСТИ ШУМОМ*

Кравчук Александр Степанович

д-р физ.-мат. наук

Кравчук Анжелика Ивановна

канд. физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. В статье разработан метод отделения аддитивных компонент цифрового сигнала в случае, когда мощность шума многократно (в 100 раз) превосходит мощность аддитивных компонент. Метод основан на использовании повторных преобразований Стеклова, т.е. процедуре повторяющегося усреднения по уменьшающимся временным интервалам или интервалам расстояний. Повторяющиеся преобразования Стеклова, примененные в дискретном случае к фильтрации полезного сигнала, названы авторами дискретным фильтром Стеклова. Предложенный метод может быть успешно применен для анализа геометрии поверхности твердого тела на нано-уровне с помощью атомного силового микроскопа. Установлено, что повторяющиеся преобразования Стеклова изменяют амплитуды гармонических составляющих отделяемых компонент. Поэтому предложено проводить корректировку амплитуд всех гармонических составляющих выделенного полезного сигнала с помощью экспериментально определяемых коэффициентов, исходя из результатов самотестирования дискретного фильтра Стеклова.

Ключевые слова: преобразование Стеклова; ряд Фурье; цифровой сигнал; высокочастотные помехи; фильтрация дискретного сигнала; дискретный фильтр.

* Исследования выполнены в соответствии с грантом INTAS для молодых ученых Ref. № 03-55-1894 от 12.03.2004.

APPLICATION REPEATED TRANSFORMATION OF STEKLOV FOR THE FILTRATION OF DESIRED SIGNAL FROM ITS MIXTURE WITH NOISE WHICH HAS MANY TIMES EXCEEDING POWER

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences

Kravchuk Anzhelica Ivanovna

candidate of physical and mathematical sciences

Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. The paper developed a method for separating the additive component of the digital signal when the power of the noise repeatedly (100 times) more than the power of additive component. It is based on the application of repeated Steklov transformations, ie procedure of repeated averaging decreasing distance of averaging intervals. Repeated Steklov transformation applied in the discrete case to the filtration of the desired signal. This digital filter named authors as Steklov filter. The proposed method can be successfully applied to analyze the geometry of the solid surface at the nano level using an atomic force microscope. It is found that repetitive Steklov transformation alter the amplitudes of the harmonic components of separated components. Therefore it is suggested to carry out the adjustment of the amplitudes of the harmonic components of the selected desired signal using experimentally determined coefficients, based on the self-test results of the digital filter Steklov.

Key words: Steklov transformation; Fourier series; a digital signal; high-frequency noise; filtering of a digital signal; a digital filter.

Введение. Обработка цифровых сигналов основывается на классической идее применения теории рядов Фурье. Это объясняется тем, что теория тригонометрических рядов очень хорошо исследована и ранее широко применялась в анализе и синтезе аналоговых сигналов. Поэтому сведение теории цифровых сигналов к теории аналоговых с помощью

дискретного преобразования Фурье (ДПФ) казалось естественным и простым решением новых задач.

Применение ДПФ имеет теоретическое преимущество: все этапы обработки достаточно ясны. Но практическая реализация этих этапов для цифровых сигналов имеет существенные неудобства, в частности, сложность достоверного вычисления спектра [1].

Наиболее перспективным путем анализа цифровых сигналов является разделение цифровых компонентов без промежуточного вычисления коэффициентов Фурье. Это позволяет повысить надежность отделения компонент сигнала. В статье впервые разработан метод отделения аддитивных компонент цифрового сигнала, основанный на использовании повторных преобразований Стеклова. Он может быть успешно применен для анализа геометрии поверхности твердого тела на наноуровне с помощью атомного силового микроскопа.

Отделение аддитивных компонент сигнала. Будем предполагать, что сигнал $f(x)$ является непрерывной функцией на $(0, \ell)$, тогда $f(x)$ принадлежит функциональному пространству $L_2(0, \ell)$ с нормой [2]:

$$\|f(x)\| = \left(\frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Пусть при этом будут выполнены условия:

$$f(0) = 0, \quad f(\ell) = 0. \quad (2)$$

Будем также предполагать, что функция $f(x)$ является нечетной на $(-\ell, \ell)$ и периодической с периодом 2ℓ на вещественной оси $(-\infty, \infty)$. В этом случае $f(x)$ может быть представлена в виде сходящегося ряда Фурье [2]:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{\ell} x\right),$$

где

$$b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{\ell} x\right) dx, \quad k = 1, \dots, \infty. \quad (3)$$

Рассмотрим преобразование Стеклова \mathfrak{S}_λ , примененное к функции $f(x)$ на длине ℓ :

$$f_\lambda(x) = \mathfrak{S}_\lambda(f(x)) = \mathfrak{S}_\lambda \circ f = \frac{1}{\lambda} \int_{x-\lambda/2}^{x+\lambda/2} f(s) ds. \quad (4)$$

Определим функцию $f_\lambda^2(x)$, к которой преобразование Стеклова применено дважды:

$$f_\lambda^2(x) = \mathfrak{S}_\lambda \circ f_\lambda = \mathfrak{S}_\lambda \circ \mathfrak{S}_\lambda \circ f = (\mathfrak{S}_\lambda)^2 \circ f.$$

Аналогично определим преобразование Стеклова степени m , примененное к функции $f(x)$ на длине λ ($\lambda < \ell$):

$$f_\lambda^m(x) = (\mathfrak{S}_\lambda)^m \circ f. \quad (5)$$

Функция $f_\lambda(x)$ является непрерывной периодической функцией с периодом 2ℓ . Поэтому $f_\lambda^m(x)$ (4) ($m > 1$) является непрерывно-дифференцируемой функцией также с периодом 2ℓ .

Ряд Фурье функции $f_\lambda^m(x)$ имеет следующую форму:

$$f_\lambda^m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{\ell} x\right), \quad (6)$$

где

$$\tilde{b}_k = b_k \cdot \left(\frac{2 \cdot \ell \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{\ell} \frac{\lambda}{2}\right)}{k \cdot \pi \cdot \lambda} \right)^m. \quad (7)$$

Рассмотрим множество фильтрующих длин $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($\lambda_k > 0$), где $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$, и определим вспомогательную функцию $f_1(x) = f(x)$.

Пусть m – заданное натуральное число, тогда рассмотрим функцию:

$$f_{\lambda_1}^m(x) = (\mathfrak{S}_{\lambda_1})^m \circ f_1. \quad (8)$$

Далее последовательно определим множества функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{f_{\lambda_k}^m(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - f_{\lambda_{k-1}}^m(x), \quad f_{\lambda_k}^m(x) = (\mathfrak{S}_{\lambda_k})^m \circ f_k, \quad k = 2, \dots, \infty. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию $f_{n+1}(x)$:

$$f_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n f_{\lambda_k}^m(x), \quad (10)$$

где n – некоторое натуральное число.

Функция $f_{n+1}(x) \in L_2(0, \ell)$ (7), (8) является нечетной на отрезке $(-\ell, \ell)$ и периодической на $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, с учетом (5):

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta b_{k,n} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{\ell} x\right), \quad (11)$$

где

$$\delta b_{k,n} = b_k \cdot \left(\frac{2 \cdot \ell \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{\ell} \frac{\lambda_n}{2}\right)}{k \cdot \pi \cdot \lambda_n} \right) \times \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{2 \cdot \ell \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell} \frac{\lambda_j}{2}\right)}{k \cdot \pi \cdot \lambda_j} \right)^m \right), \quad (12)$$

где $k = 1, \dots, \infty$, b_k коэффициенты Фурье функции $f(x)$ (2). Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$, следовательно, справедливо следующее соотношение:

$$\delta b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta b_{k,n} = 0. \quad (13)$$

Это означает (1), (9), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{n+1}(x)\| = 0. \quad (14)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть $f(x) \in L_2(0, \ell)$ и m – натуральное число. Рассмотрим систему фильтрующих длин $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и порожденное ей множество функций $\left\{f_{\lambda_k}^m(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ (8). Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$, то справедливо следующее разложение в ряд:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{\lambda_k}^m(x). \quad (15)$$

Определение фильтрующих длин с помощью геометрической прогрессии. Например, предположим, что $\lambda_k / \lambda_{k-1} = \Delta \ll 1$ ($k = 2, \dots, \infty$). В этом случае система фильтрующих длин $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет определяться уравнениями:

$$\lambda_k = \ell \cdot \Delta^k. \quad (16)$$

Положив $\Delta \approx 0.1$, получаем, что переход к сигналу следующего уровня осуществляется, когда фильтрующая длина изменяется в 10 раз. Соответственно можно различать макро-, деци-, санти- и т.д. компоненты сигнала.

Выделение аддитивных компонент цифрового сигнала. Для применения доказанной теоремы при фильтрации компонент цифрового сигнала необходимо предварительно определить величину m и множество фильтрующих отрезков $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Поскольку целью исследований цифрового сигнала является выделение максимального числа N_{level} гладких аддитивных компонент $\left\{f_{\lambda_k}^m(x)\right\}_{k=1}^{N_{level}}$ сигнала $f(x)$ определенного на отрезке $(0, \ell)$, то следует выбирать $m \geq 3$. В качестве множества

фильтрующих отрезков будем использовать множество $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, построенное по правилу (16).

Будем предполагать, что условия (2) выполнены и $f(x)$ является нечетной на $(-\ell, \ell)$ и периодической на $(-\infty, \infty)$. Пусть задано конечное множество дискретных значений $\{(x_n, f_n)\}_{n=0}^{N_{array}-1}$ с равномерным шагом $h = \ell / N_{array}$, где $x_n = n \cdot h$, $f_n = f(x_n)$, N_{array} – число измеренных значений. Из условия (2) следует, что $f_{N_{array}} = 0$. Используя нечетность $f(x)$ на $(-\ell, \ell)$, определим массив:

$$\{f_n\}_{n=-N_{array}}^{N_{array}}, \quad (17)$$

где $f_{-n} = -f_n$ ($n = \overline{0..N_{array}}$).

Используя периодичность $f(x)$ на $(-\infty, \infty)$, определим массив $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ по правилу (рис. 1):

$$f_{2 \cdot j \cdot N_{array} + n} = f_n \quad (n = \overline{-N_{array}..(N_{array} - 1)}), \quad (18)$$

где j – заданное целое число.

Необходимо отметить, что N_{level} – количество гладких аддитивных компонент дискретного сигнала $\{f_n\}_{n=0}^{N_{array}}$.

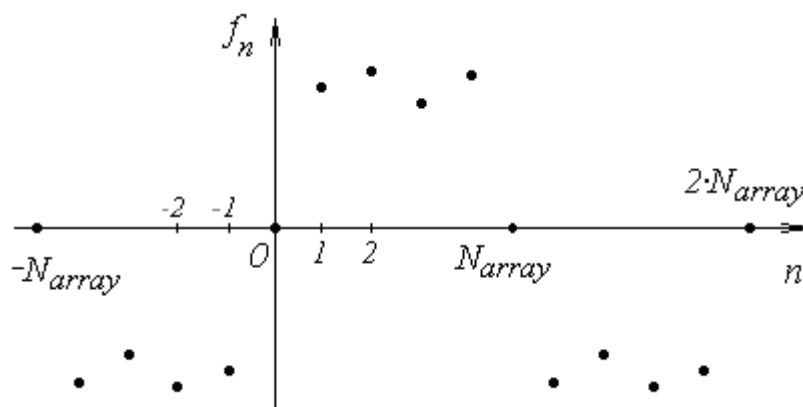


Рис. 1. Периодическое продолжение дискретного массива

Пусть $\{N_{\lambda_k}\}_{k=1}^{N_{level}}$ – множество натуральных четных чисел таких, что N_{λ_k} является ближайшим к числу $\lambda_k/h = \Delta^k \cdot (N_{array} - 1)$. Очевидно, что предельно допустимое количество выделенных слоев N_{level} определяется количеством значений N_{array} . Исходя из того, что $\lambda_{N_{level}+1} = h$ можно получить, что $\lambda_{N_{level}+1} = \ell/N_{array}$. Используя далее (16), получаем уравнение:

$$N_{height} \cdot \Delta^{N_{level}+1} = 1. \quad (19)$$

Например, если $N_{array} = 1000$, $\Delta = 0.1$, то $N_{level} = 2$, т.е. из сигнала можно последовательно выделить компоненты $f_{\lambda_1}^m(x)$, $f_{\lambda_2}^m(x)$ и остаток $f_3(x)$ (9).

Известно, что $f_{1,n} = f(x_n) = f_n$. Поэтому в соответствии с правилом Симпсона дискретный аналог преобразования Стеклова имеет вид:

$$f_{\lambda_1,n}^1 = f_{\lambda_1}(x_n) \approx \frac{1}{3 \cdot N_{\lambda_1}} \left(\left(f_{n-N_{\lambda_1}/2} + f_{n+N_{\lambda_1}/2} \right) + 2 \sum_{i=1}^{N_{\lambda_1}/2-1} f_{(n-N_{\lambda_1}/2+2 \cdot i)} + \right. \\ \left. + 4 \sum_{i=0}^{N_{\lambda_1}/2-1} f_{(n-N_{\lambda_1}/2+2 \cdot i+1)} \right). \quad (20)$$

Для любого фиксированного $m > 1$ можно последовательно определить дискретный аналог (8):

$$f_{\lambda_1,n}^m = f_{\lambda_1,n}^m(x_n) \approx \\ \approx \frac{1}{3 \cdot N_{\lambda_1}} \left(\left(f_{\lambda_1,(n-N_{\lambda_1}/2)}^{m-1} + f_{\lambda_1,(n+N_{\lambda_1}/2)}^{m-1} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^{N_{\lambda_1}/2-1} f_{\lambda_1,(n-N_{\lambda_1}/2+2 \cdot i)}^{m-1} + 4 \sum_{i=0}^{N_{\lambda_1}/2-1} f_{\lambda_1,(n-N_{\lambda_1}/2+2 \cdot i+1)}^{m-1} \right). \quad (21)$$

Далее аналогично (9) получим ($k = 2, \dots, N_{level}$):

$$f_{k,n} = f_k(x_n) = f_{k-1,n} - f_{\lambda_{k-1},n}, \quad n = 0, \dots, (N_{array} - 1), \quad (22)$$

и

$$f_{\lambda_k,n}^m = f_{\lambda_k,n}^m(x_n) \approx \frac{1}{3 \cdot N_{\lambda_k}} \left(\left(f_{\lambda_k,(n-N_{\lambda_k}/2)}^{m-1} + f_{\lambda_k,(n+N_{\lambda_k}/2)}^{m-1} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^{N_{\lambda_k}/2-1} f_{\lambda_k,(n-N_{\lambda_k}/2+2 \cdot i)}^{m-1} + 4 \sum_{i=0}^{N_{\lambda_k}/2-1} f_{\lambda_k,(n-N_{\lambda_k}/2+2 \cdot i+1)}^{m-1} \right), \quad (23)$$

$$n = 0, \dots, N_{array}.$$

При постановке численного эксперимента предполагалось, что $m=3$, $N_{array} = 997$ и $\Delta = 0.1$ (рис. 2): $f_{\lambda_1}^3(x)$ – макро-сигнал (рис. 3); $f_{\lambda_2}^3(x)$ – деци-компонента сигнала (рис. 4), $f_3(x)$ – остаток от выделения компонент (рис. 5).

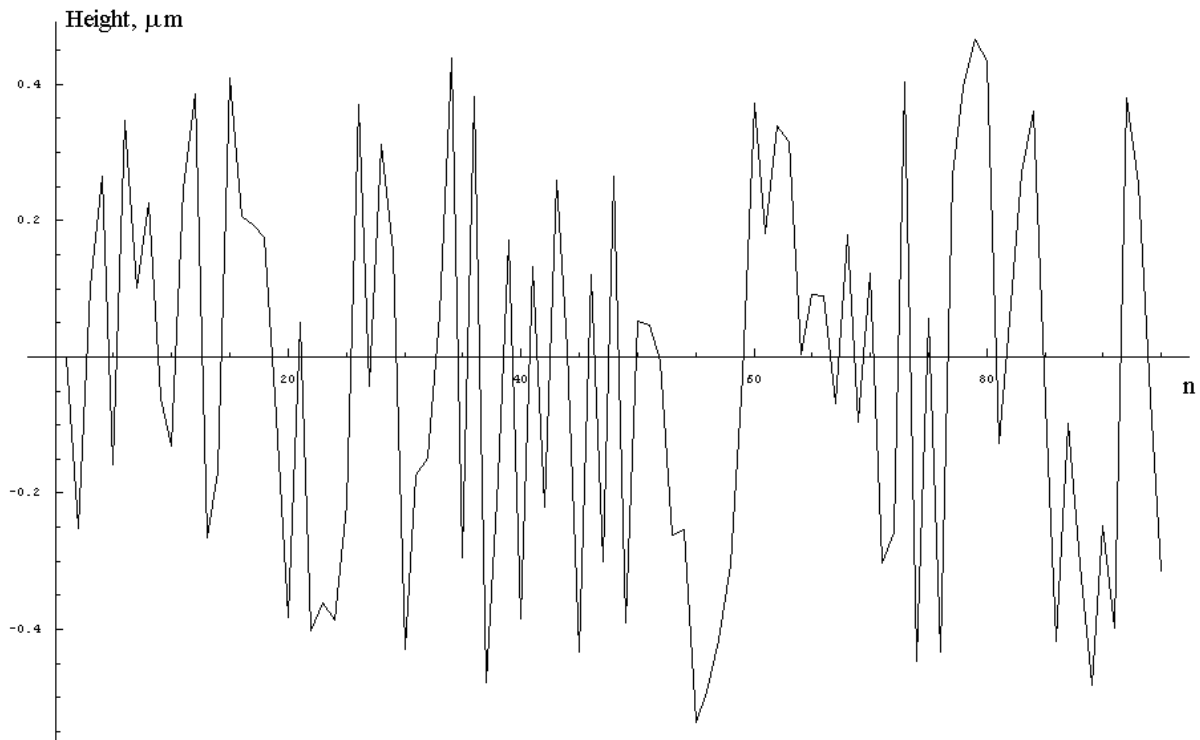


Рис. 2. Кусочно-линейная интерполяция сигнала, определяемого дискретным множеством случайных значений

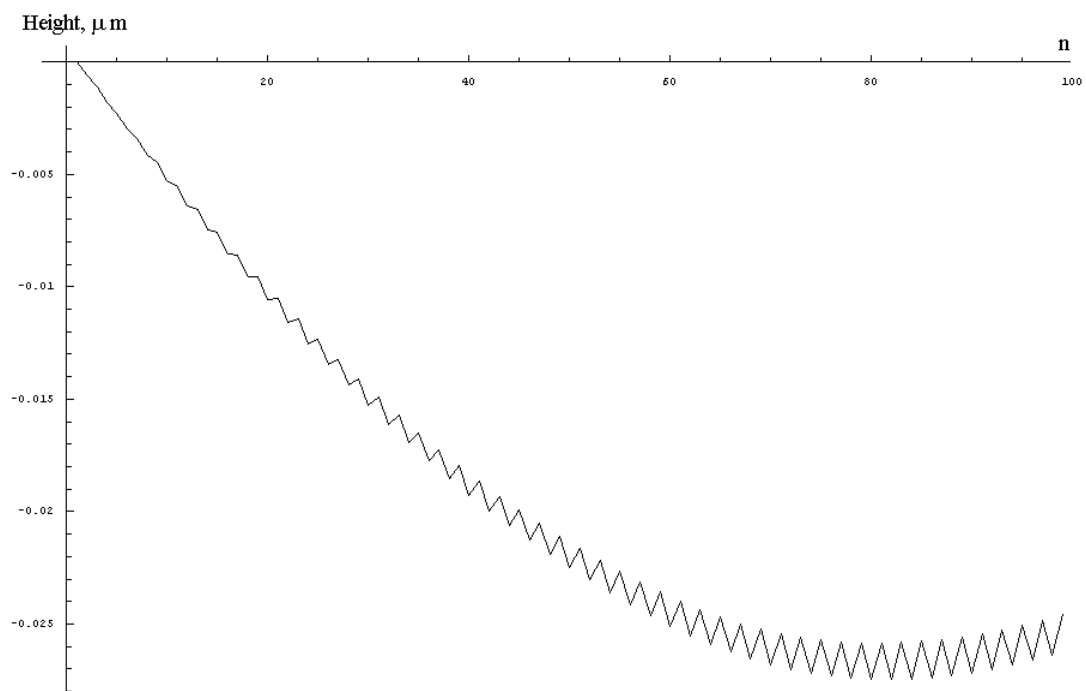


Рис. 3. Кусочно-линейная интерполяция выделенной компоненты $f_{\lambda_1}^3(x)$ (макро-сигнал)

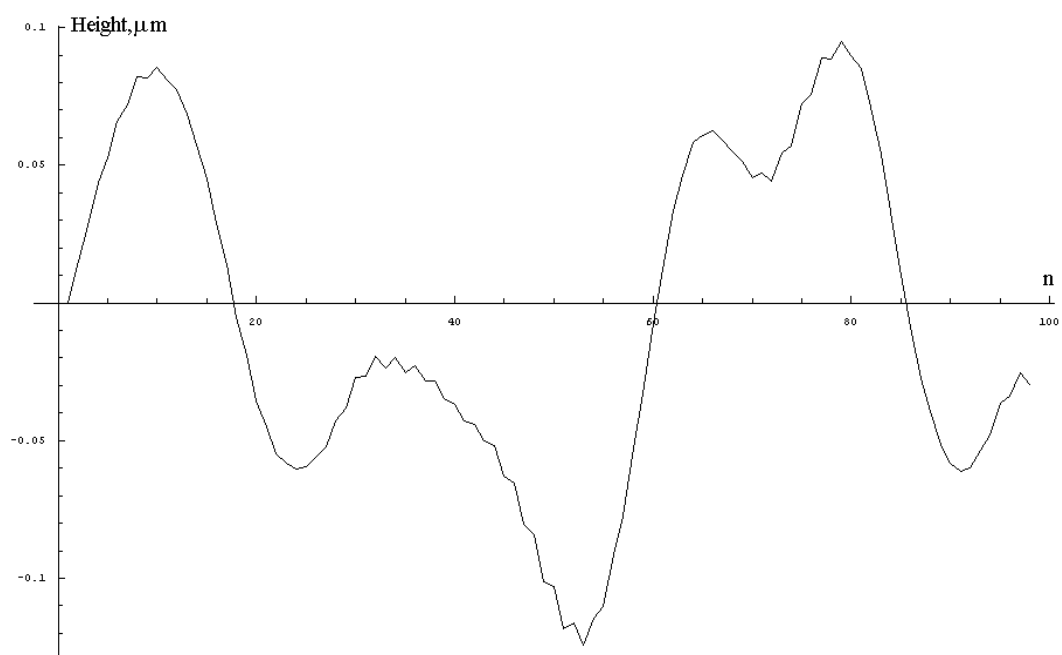


Рис. 4. Кусочно-линейная интерполяция выделенной компоненты $f_{\lambda_2}^3(x)$ (деци-компонента сигнала)

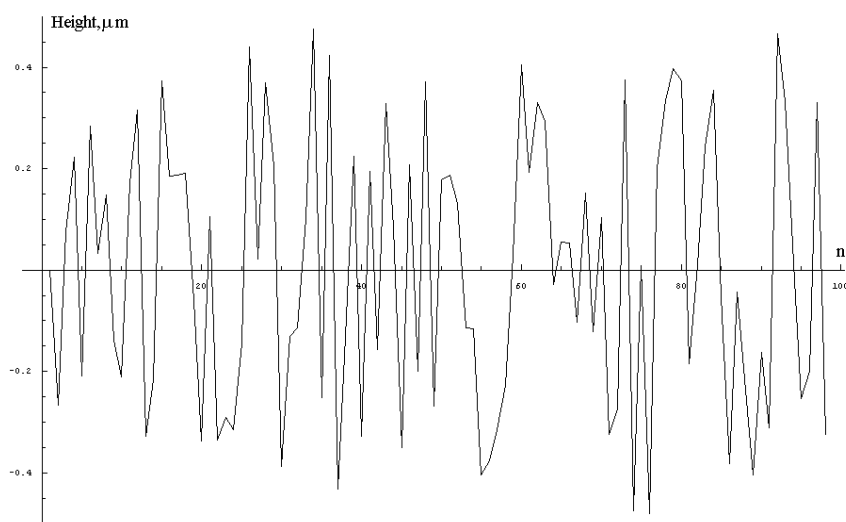


Рис. 5. Кусочно-линейная интерполяция выделенной компоненты $f_3(x)$ – остаток без макро- и деци-компонент

Особенности применения предлагаемого метода при фильтрации полезного сигнала из аддитивной смеси с шумом. Непосредственное применение метода отделения аддитивных компонент (17)-(23) для фильтрации полезного сигнала из его смеси с шумом невозможно. Дело в том, что применение даже однократного преобразования Стеклова (усреднения значений по временному интервалу) приводит к искажению всех гармонических составляющих полезного сигнала (7). Эта проблема усложняется тем, что коэффициент искажения в дискретном случае существенно зависит, не только от количества повторений преобразования Стеклова (7), а также от длин интервалов, на которых это преобразование выполняется.

При практической реализации метода фильтрации нам достаточно знать наибольшую частоту полезного сигнала (все более высокие частоты относятся к шуму) и поскольку гармонических составляющих полезного сигнала конечное количество, то последовательно пропуская их с единичной амплитудой через дискретный повторяющийся фильтр Стеклова можно узнать поправочный коэффициент искажения. Эта возможность обоснована тем, что гармонический сигнал, поступающий

на вход аналогового фильтра Стеклова, после него остается гармоническим сигналом той же частоты, но с измененной амплитудой.

Метод выделения полезного сигнала из смеси с высокочастотным шумом. На первом шаге метода выделения сигнала необходимо определить максимальную частоту, относящуюся к полезному сигналу. Тогда, очевидно, частот, составляющих полезный сигнал, N_{harm} штук. Кроме того, необходимо задать m – количество повторений применения фильтра Стеклова.

Далее необходимо пропустить через усредняющий фильтр (23) все k штук гармонических компонент с единичной амплитудой, которые могут составлять полезный сигнал и определить коэффициенты искажения $\{\gamma_i\}_{i=1}^{N_{harm}}$, $\gamma_{i,i=\overline{1,N_{harm}}}$ – значение ДПФ, полученное после пропускания гармоники с номером k через фильтр (23).

На втором шаге метода выделения сигнала из полученного массива значений «сигнал+помеха» $\{f_n\}_{n=0}^{N_{array}-1}$ с помощью (23) необходимо получить массив значений искаженного «сигнала без шума»

$$\left\{ \begin{matrix} f \\ \lambda_{1,n} \end{matrix} \right\}_{n=0}^{N_{array}-1}.$$

На третьем шаге метода, исходя из $\left\{ \begin{matrix} f \\ \lambda_{1,n} \end{matrix} \right\}_{n=0}^{N_{array}-1}$, необходимо с помощью ДПФ получить искаженные фильтром коэффициенты ряда Фурье $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^{N_{harm}}$ полезного сигнала.

На четвертом шаге метода необходимо, исходя из $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^{N_{harm}}$ и $\{\gamma_j\}_{j=1}^{N_{harm}}$ (см. первый шаг метода), получить реальные коэффициенты $\{b_j\}_{j=1}^{N_{harm}}$ полезного сигнала по формуле $b_{j,(j=\overline{1,N_{harm}})} = \hat{b}_j / \gamma_j$.

Таким образом, в конце описываемого метода фильтрации полезный сигнал имеет дискретный набор значений, определяемых в следующем виде:

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \sin\left(j \cdot \frac{\pi}{\ell} x_n\right) \right\}_{n=0}^{N_{array}-1} . \quad (24)$$

Результаты численных тестов предлагаемого метода с использованием детерминированных помех. Предполагается, что имеется массив равноотстоящих значений «сигнал+помеха». Целью этого пункта в данной статье является демонстрация гибкости и универсальности предлагаемого алгоритма.

В тесте предполагалось, что $\Delta = 0.1$ (16). Экспериментально установлено, что наилучшие результаты по выделению сигнала из его смеси с мощными помехами достигаются при $m \geq 3$ (чем мощнее шум по отношению к сигналу, тем больше m). В тестах $N_{array} = 1000$ и заданный детерминированный сигнал имеет вид (рис. 6):

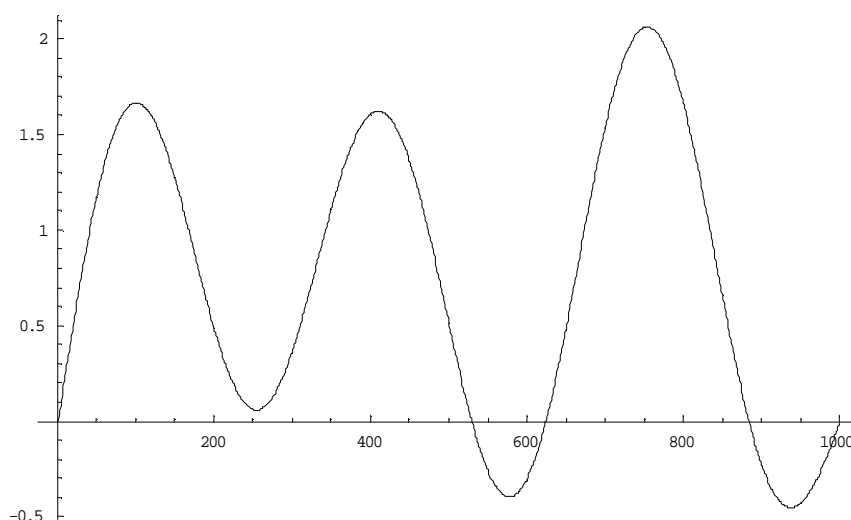
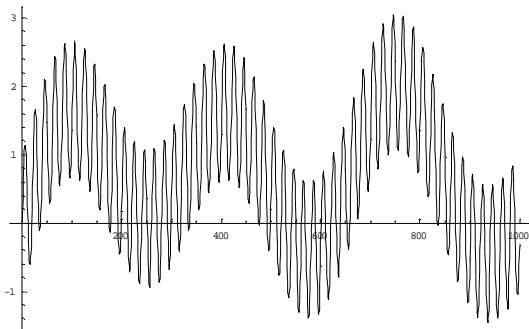
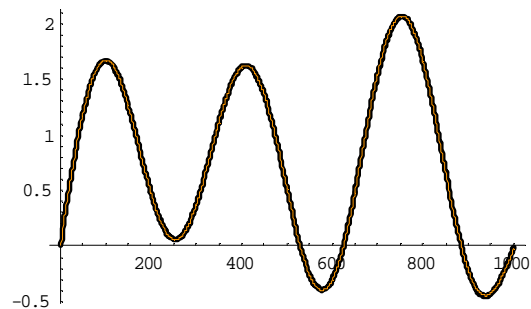


Рис. 6. Тестовый сигнал $\sin(x) + 0.5 \sin(3 \cdot x) + \sin(6 \cdot x)$

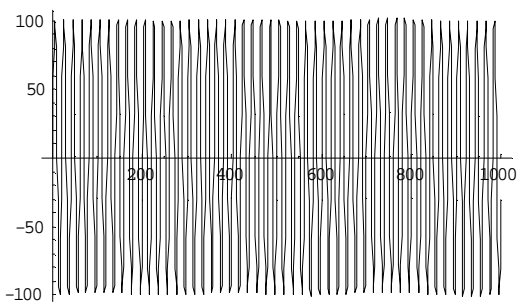
При фильтрации полезного сигнала из его смеси с высокочастотной гармонической помехой с помощью предлагаемого метода установлено, что относительная ошибка восстановления полезного сигнала не превосходит 0.01 от амплитуды сигнала (рис. 7). Относительная ошибка увеличивается до 0.23 (от амплитуды полезного сигнала) при понижении частоты гармонической помехи (рис. 8).



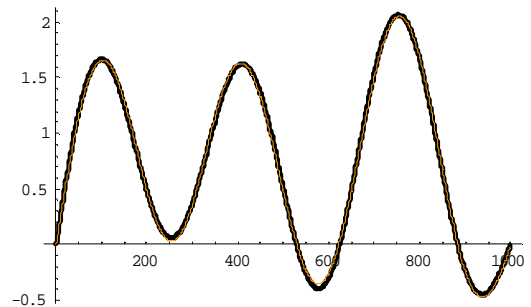
а)



б)



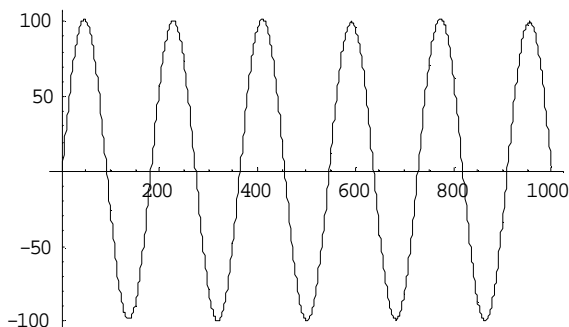
в)



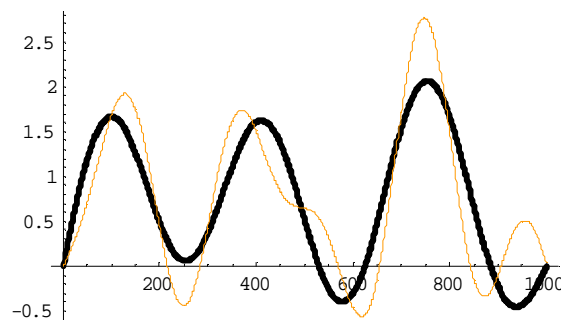
г)

- а)** смесь полезного сигнала с гармонической помехой, при $a = 1$;
б) результат выделения полезного сигнала (оранжевая линия) из смеси с гармонической помехой ($a = 1$), черная линия – исходный полезный сигнал (25) (рис. 6);
в) смесь полезного сигнала с гармонической помехой, при $a = 100$;
г) результат выделения полезного сигнала (оранжевая линия) из смеси с гармонической помехой ($a = 100$), черная линия – исходный полезный сигнал (3) (рис. 6).

Рис. 7. Результат выделения полезного сигнала (1) (рис. 6) из его смеси с заданной высокочастотной гармонической помехой в виде $a \cdot \sin(100 \cdot x)$



а)



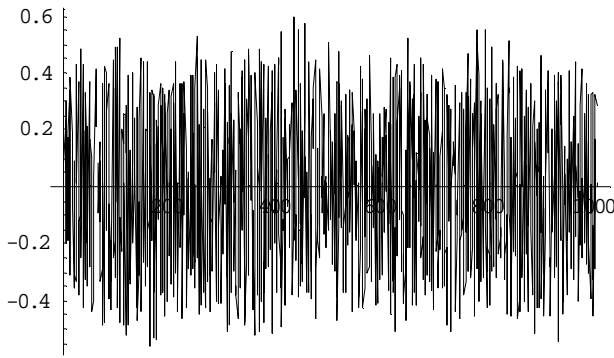
б)

а) смесь полезного сигнала с гармонической помехой, при $\omega = 11$;
б) результат выделения полезного сигнала (оранжевая линия) из смеси с гармонической помехой ($\omega = 11$), черная линия – исходный полезный сигнал (25).

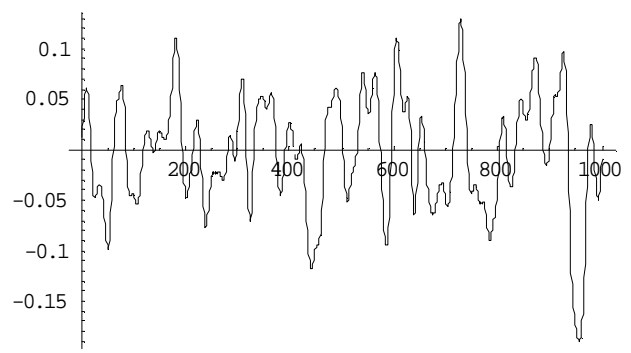
Рис. 8. Влияние частоты гармонической помехи $100 \cdot \sin(\omega \cdot x)$ на результаты выделения полезного сигнала (25)

Тестирование предлагаемого метода при использовании случайных помех. Будем использовать две аддитивных компоненты шума, созданного генератором псевдо-случайных чисел. Компоненты были отфильтрованы с помощью метода, изложенного выше. Будет рассматриваться шум $f_3(x)$ (Рисунок 9, а) и низко-частотные гармонические помехи $f_{\lambda_2}^3(x)$ (рис. 9, б).

При фильтрации полезного сигнала из его смеси с шумом с помощью предлагаемого метода установлено, что относительная ошибка фильтрации не превосходит 0.01 от амплитуды полезного сигнала (Рис. 10). Относительная ошибка увеличивается до 0.31 (от амплитуды полезного сигнала) при присутствии в шуме гармонических низкочастотных составляющих (Рис. 11).



а)

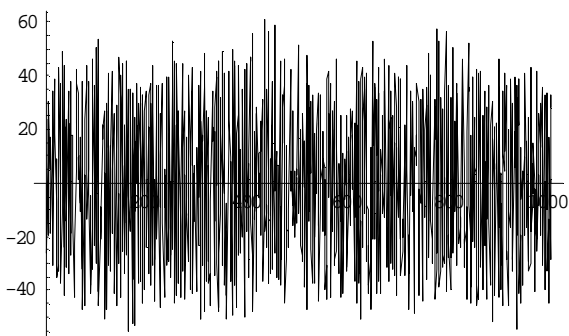


б)

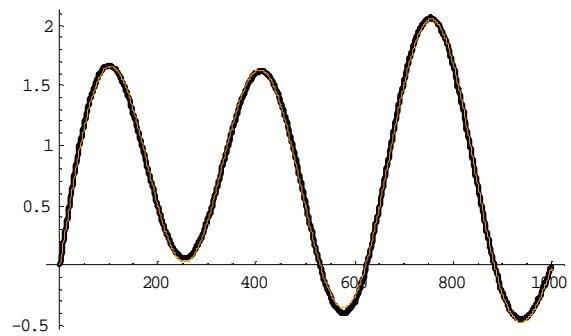
а) шум без низкочастотных гармонических составляющих $f_3(t)$;

б) низкочастотные гармонические составляющие шума $f_{\lambda_2}^3(x)$.

Рис. 9. Виды помех, использованные при тестировании метода выделения полезного сигнала



а)

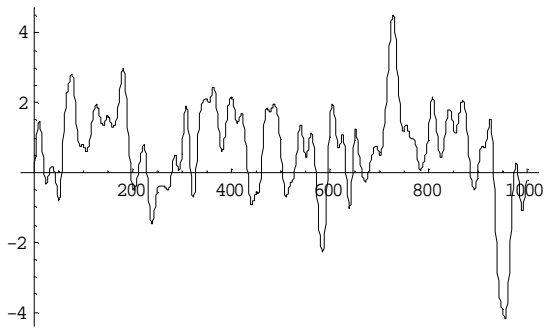


б)

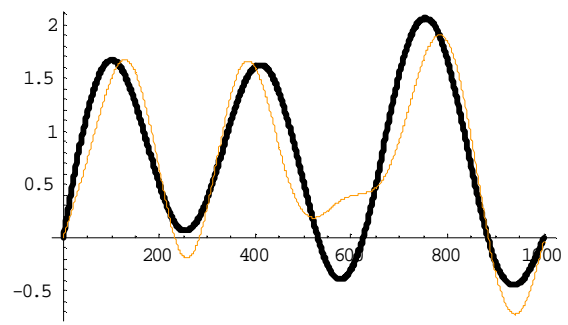
а) смесь полезного сигнала с шумом, при $a = 100$;

б) результат выделения полезного сигнала (оранжевая линия) из смеси с шумом ($a = 100$), черная линия – исходный полезный сигнал (25).

Рис. 10. Влияние мощности стохастического шума на точность фильтрации полезного сигнала из смеси $\sin(x) + 0.5 \sin(3 \cdot x) + \sin(6 \cdot x) + a \cdot f_3(x)$



а)



б)

а) смесь полезного сигнала с помехами, при $b = 20$;

б) результат выделения полезного сигнала (оранжевая линия) из смеси с помехами ($b = 20$), черная линия – исходный полезный сигнал (25).

Рис. 11. Влияние мощности низкочастотных гармонических помех на точность выделения полезного сигнала из смеси

$$\sin(t) + 0.5 \sin(3 \cdot x) + \sin(6 \cdot x) + b \cdot f_{\lambda_2}^3(x)$$

Выводы. В статье разработан метод отделения аддитивных компонент цифрового сигнала в случаях, когда мощность шума в несколько раз превосходит мощность аддитивных компонент. Он основан на использовании повторных преобразований Стеклова и может быть успешно применен для анализа геометрии поверхности твердого тела на наноуровне с помощью атомного силового микроскопа.

При фильтрации полезного сигнала из смеси с помехами (высокочастотные гармонические помехи или шум) мощность помех не оказывает влияния на результат применения метода выделения полезного сигнала (рис. 7, 10).

Частота гармонических помех имеет значительное влияние на эффективность выделения сигнала. Для уверенного выделения сигнала минимальная длина его волны должна быть на 30 % больше максимальной длины волны помех (рис. 8, 11).

Практически при любом уровне преобладания мощности шума с высокочастотными гармоническими компонентами над мощностью

полезного сигнала последний всегда можно извлечь из его смеси с шумом (в частности за счет увеличения количества m повторений применения дискретного фильтра Стеклова) (рис. 7, 10).

Метод выделения сигнала выдерживает добавление низкочастотных помех, если их мощность существенно меньше мощности полезного сигнала.

Список использованных источников

1. Кравчук А.С., Кравчук А.И., Рымуза З. Вычисление достоверных коэффициентов Фурье цифрового сигнала // Обработка цифровых сигналов. 2010. № 2. С. 19-21.
2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматлит. 1961. 937 с.