

УДК 534

**МАЛЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНО
ПОДВЕШЕННОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ КОМПОЗИЦИОННОЙ НИТИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ**

Кравчук Александр Степанович

д-р физ.-мат. наук

Кравчук Анжелика Ивановна

канд. физ.-мат. наук

Тарасюк Иван Александрович

магистрант

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. Получены эффективные значения собственных частот колебаний деформируемой композиционной нити, подвешенной за один из концов, под действием силы тяжести в приближении Хилла эффективных характеристик для материала нити с учетом деформационных и реологических параметров компонент. При получении решения для однородной и композиционной нити из реологически активного материала использовалась наследственная теория ползучести, а также техническая теория старения.

Ключевые слова: приближение Хилла эффективных деформационных характеристик композиционного материала; одноосное нагружение; ползучесть; наследственная теория; техническая теория старения.

**SMALL TRANSVERSE OSCILLATIONS
OF VERTICALLY SUSPENDED DEFORMABLE COMPOSITE YARN
UNDER THE INFLUENCE OF GRAVITY**

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences

Kravchuk Anzhelica Ivanovna

candidate of physical and mathematical sciences

Tarasyuk Ivan Alexandrovich

undergraduate

Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. The effective values of the Eigen frequencies of oscillation of the deformable composite yarn, vertically suspended by one end, under the influence of gravity in the Hill's approximation of effective characteristics for the yarn material with the deformation and rheological properties of the component were obtained. Hereditary creep theory, as well as technical theory of aging, was used in the preparation of solutions for homogeneous and composite yarn made from rheologically active material.

Key words: Hill's approximation of effective deformation characteristics of composite material; uniaxial loading; creep; hereditary theory; technical theory of aging.

Введение. Одной из модельных задач уравнений математической физики является задача о собственных колебаниях подвешенной за один конец недеформируемой нити под действием силы тяжести [1]. Однако это решение может быть обобщено на случай нелинейной деформации нити, а также на случай ползучести ее материала.

По результатам данного решения можно установить влияние деформационных и реологических характеристик многокомпонентного материала на собственные частоты свободных колебаний нити.

Вывод уравнения колебания однородной недеформируемой нити под действием силы тяжести. Будем придерживаться плана вывода уравнения изложенного в [1]. Колебание нити происходит в плоскости xOy , а сама нить расположена вдоль оси Ox на интервале $(0, \ell)$, где ℓ – длина нити. Пусть в положении равновесия один конец нити закреплен в точке с координатами $x = \ell$ и $y = 0$ координатной плоскости xOy . Сила тяжести действует в отрицательном направлении Ox . Каждая точка нити смещается лишь параллельно оси Oy и это перемещение в момент времени t обозначается $u(x, t)$. Пусть нить имеет постоянную площадь поперечного сечения S ($S \neq 0$).

При выводе уравнения будем рассматривать внутренний участок нити, соответствующий интервалу (x_1, x_2) на оси Ox (рис. 1). Зафиксируем произвольное время t . Вычислим длину участка нити, соответствующую интервалу (x_1, x_2) [1-3]:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx. \quad (1)$$

Из (1) очевидно, что длина нити, соответствующая интервалу (x_1, x_2) , имеет длину $x_2 - x_1$ только тогда, когда выполнено приблизи-

тельное равенство $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1$, свидетельствующее, что рассматриваются малые колебания нити [1].

Отметим, что если α – угол между касательной к нити и осью Ox , то $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\cos(\alpha) = 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$, $\sin(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$ и при принятых предположениях $\cos(\alpha) \approx 1$, а $\sin(\alpha) \approx \frac{\partial u}{\partial x}$.

Пусть T_1 и T_2 – силы натяжения нити, действующие на концах ее участка (x_1, x_2) . По величине эти силы зависят от массы отрезков $(0, x_1)$ и $(0, x_2)$ (рис. 1). Таким образом, можно получить следующие уравнения:

$$T_1 = \int_0^{x_1} \rho \cdot (-g) dx \cdot S = -\rho \cdot g \cdot S \cdot x_1, \quad T_2 = \int_0^{x_2} \rho \cdot (-g) dx \cdot S = -\rho \cdot g \cdot S \cdot x_2, \quad (2)$$

где ρ – плотность однородного материала нити, а g – ускорение свободного падения.

Поскольку в соответствии с предположениями задачи движение осуществляется только в направлении оси Oy (рис. 1), положительная горизонтальная сила, действующая на участок нити (x_1, x_2) с учетом (2), равна:

$$-\left(T_2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - T_1 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} \right) = \rho \cdot g \cdot S \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \quad (3)$$

Отрицательный знак появляется в сумме сил (3) из-за того, что сила в точке x_1 направлена противоположно направлению касательной $\frac{\partial u}{\partial x}$.

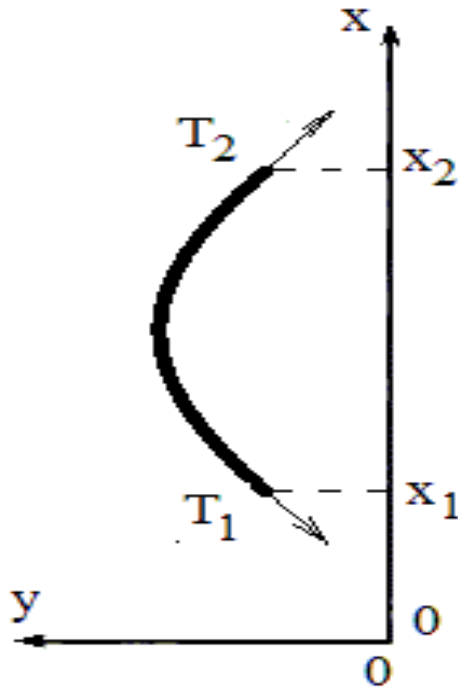


Рис. 1. Горизонтальное движение участка нити, соответствующего интервалу (x_1, x_2) , с действующими на концах силами, заменяющими отброшенные части нити

Далее горизонтальная инерционная составляющая рассматриваемого отрезка нити определяется формулой [1]:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx \cdot S. \quad (4)$$

Исходя из баланса действующих на отрезок (x_1, x_2) сил, получаем из (2)-(4):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx = g \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \quad (5)$$

Уравнение (5) можно переписать в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) dx = 0. \quad (6)$$

Если считать, что участок нити (x_1, x_2) настолько мал по сравнению с длиной волны, что выполнена формула Лагранжа [3]:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) dx \approx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \Big|_{x=x_0} \cdot (x_2 - x_1), \quad (7)$$

где $x_0 \in (x_1, x_2)$ – некоторая точка, то из (7) с очевидностью будет следовать общеизвестное локальное уравнение колебания вертикально подвешенной нити под действием силы тяжести [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (8)$$

где $a^2 = g$.

Отметим, что при решении конкретных физических задач с помощью (8) остается неопределенным способ вычисления удлинения нити под действием силы тяжести.

Решение уравнения свободного колебания однородной недеформируемой нити с одним закрепленным концом. Решить непосредственно уравнение (8) не представляется возможным, поэтому будем следовать методическому подходу, изложенному в монографии [1]. Воспользуемся заменой $x = \xi^2$ ($u^*(\xi, t) = u(x, t)|_{x=\xi^2}$), тогда (8) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = \frac{a^2}{4} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right). \quad (9)$$

Метод Фурье заключается в предположении, что решение (9) с принятыми начальными и краевыми условиями имеет вид:

$$u^*(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^*(\xi, t), \quad (10)$$

где $u_j^*(\xi, t) = X_j(\xi) \cdot \Theta_j(t)$ – функции для каждого $i = \overline{1, \infty}$, удовлетворяющие уравнению (9). Подставляя $u_j^*(\xi, t)$ в (9) получаем:

$$\frac{4}{a^2} \frac{d^2 \Theta_j(t)}{\Theta_j(t)} = \frac{1}{X_j(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \cdot \frac{dX_j(\xi)}{d\xi} \right). \quad (11)$$

В (11) отнесение коэффициента a^2 к левой части гарантирует влияние ускорения свободного падения только на частотный спектр нити.

Очевидно, что (11) возможно только тогда, когда $\forall i$ обе части уравнения равны некоторой константе $-\lambda_j^2$ [1; 2]. Таким образом, из (11) получаем два независимых уравнения для определения $X_j(\xi)$ и $\Theta_j(t)$:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \cdot \frac{dX_j(\xi)}{d\xi} \right) + \lambda_j^2 \cdot X_j(\xi) = 0, \quad \frac{d^2 \Theta_j(t)}{dt^2} + \frac{1}{4} \lambda_j^2 a^2 \Theta_j(t) = 0. \quad (12)$$

Решениями уравнений (12) являются функции [1-3]:

$$X_j(\xi) = C_{1,j}^\xi \cdot J_0(\lambda_j \cdot \xi) + C_{2,j}^\xi \cdot Y_0(\lambda_j \cdot \xi), \quad (13)$$

$$\Theta_j(t) = C_{1,j}^t \cos\left(\frac{\lambda_j \cdot a \cdot t}{2}\right) + C_{2,j}^t \sin\left(\frac{\lambda_j \cdot a \cdot t}{2}\right), \quad (14)$$

где $J_0(\lambda_j \cdot \xi)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $Y_0(\lambda_j \cdot \xi)$ – функция Бесселя второго рода нулевого порядка, $C_{m,i}^\xi (m=\overline{1,2})$

и $C_{m,i}^t (m=\overline{1,2})$ – произвольные константы. Учитывая, что

$\lim_{\xi \rightarrow 0} Y_0(\lambda_j \cdot \xi) = -\infty$, что является физически невозможным поведением

свободного конца нити при гипотезе ее нерастяжимости, то $C_{2,i}^\xi = 0$.

Исходя из краевого условия неподвижности правого конца нити, получаем $u|_{x=\ell} = 0$, соответственно $u^*|_{\xi=\sqrt{\ell}} = 0$. Из общего вида решения

(10) и конкретного выражения для $X_j(\xi)$ (13) получаем, что для удовле-

творения приведенного выше краевого условия достаточно, чтобы было выполнено уравнение:

$$J_0(\lambda_j \cdot \sqrt{\ell}) = 0. \quad (15)$$

Известно, что (15) имеет бесконечное число вещественных корней μ_j [1; 2]. Отсюда следует, что для удовлетворения условия неподвижности правого конца достаточно положить $\lambda_j = \frac{\mu_j}{\sqrt{\ell}}$.

Отметим, что уравнения (12) – это дифференциальные уравнения второго порядка, т.е. для построения его единственного решения необходимо удовлетворить два крайних и два начальных условия. Однако исключение из рассмотрения функции $Y_0(\lambda_j \cdot \xi)$, исходя из очевидных соображений физического соответствия реальному процессу колебания нити, сокращает количество крайних условий до одного. И более того, необходимого использования предположения, что $C_{1,i}^\xi = 1$. Тогда решение (9) в виде (10) имеет вид [1; 2]:

$$u^*(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_j}{\sqrt{\ell}} \cdot \xi\right) \left(C_{1,i}^t \cos\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{\ell}} \cdot a \cdot t\right) + C_{2,i}^t \sin\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{\ell}} \cdot a \cdot t\right) \right). \quad (16)$$

Переходя к исходной переменной x , получаем решение (8) в виде:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\mu_j \cdot \sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) \left(C_{1,i}^t \cos\left(\frac{\mu_j}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) + C_{2,i}^t \sin\left(\frac{\mu_j}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) \right). \quad (17)$$

При начальных условиях для свободных колебаний с нулевой начальной скоростью получаем, что $u|_{t=0} = f(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$. Следовательно, $C_{2,i}^t = 0$ ($i = \overline{1, \infty}$) и уравнение (17) преобразуется к виду [1]:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\mu_j \cdot \sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) \cdot C_{1,i}^t \cdot \cos\left(\frac{\mu_j}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right), \quad (18)$$

где $C_{1,i}^t = \frac{1}{\ell \cdot J_1(\mu_i)^2} \int_0^\ell f(x) \cdot J_0\left(\mu_i \cdot \sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) dx$.

Таким образом, собственные частоты свободных колебаний недеформируемой нити определяются выражением:

$$\omega_j = \frac{\mu_j}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (19)$$

Методика определения влияния деформируемости растяжения однородной нити. Сила растяжения нити F переменна и зависит от координаты x , кроме того, она является растягивающей, а следовательно, с точки зрения механики твердого тела больше нуля (если локальную систему координат связать с правым закрепленным концом нити и направить ось действия силы в направлении силы тяжести):

$$F_x(x) = \int_0^x \rho \cdot g dx \cdot S = \rho \cdot g \cdot S \cdot x. \quad (20)$$

Разделив обе части уравнения (20) на S , получаем выражение для напряжений, действующих в каждой точке нити $x \in (0, \ell')$, где ℓ' – длина нити до ее подвешивания:

$$\sigma_x(x) = \frac{F_x(x)}{S} = \rho \cdot g \cdot x. \quad (21)$$

Исходя из того, что одномерное уравнение состояния нити в точке $x \in (0, \ell)$ определяется уравнением $\varepsilon_x(x) = \mathfrak{Z}^{-1}(\sigma_x(x))$, где $\mathfrak{Z}(\)$ – функция, определяемая непосредственно из эксперимента на простое растяжение образца материала, $\varepsilon_x(x)$ – деформация нити, т.е. относительное удлинение нити в точке с координатой $x \in (0, \ell')$. Тогда суммарное удлинение нити Δ определяется уравнением:

$$\Delta = \int_0^{\ell'} \varepsilon_x(x) dx = \int_0^{\ell'} \mathfrak{Z}^{-1}(\rho \cdot g \cdot x) dx. \quad (22)$$

Таким образом, в случае использования деформируемой под действием силы тяжести нити получаем, что ее общая длина после подвешивания l вычисляется через длину до подвешивания l' по очевидной формуле:

$$l = l' + \int_0^{l'} \mathfrak{S}^{-1}(\rho \cdot g \cdot x) dx. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (19) получаем зависимость собственных частот от деформационных характеристик:

$$\omega_i = \frac{\mu_i}{2} \cdot \sqrt{g / \left(l' + \int_0^{l'} \mathfrak{S}^{-1}(\rho \cdot g \cdot x) dx \right)}. \quad (24)$$

Из (19), (23) и (24) следует, что если измерить длину нити уже после подвешивания, то вычисления по (19) дадут сразу точный результат.

В качестве значимого практического примера можно рассмотреть однородный нелинейно-деформируемый (гиперэластичный) материал нити, в уравнении состояния которого используется степенная функция (например, резина), в этом случае [4]:

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon_{x,эт}^{раст} \cdot \left(\frac{\sigma_x(x)}{\sigma_{x,эт}^{раст}} \right)^{\frac{1}{\alpha_x^{раст}}}, \quad (25)$$

где $\sigma_{x,эт}^{раст}$, $\varepsilon_{x,эт}^{раст}$, $\alpha_x^{раст}$ ($\alpha_x^{раст} < 1$) – характерные для материала константы, определяемые исходя из эксперимента по растяжению нити вдоль направления Ox .

Подставляя (25) в (24), получаем уравнение для собственных частот нити, закрепленной за один конец, на которую действует сила тяжести:

$$\omega_j = \frac{\mu_j}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l' + \varepsilon_{x,эм}^{раст} \cdot \left(\frac{\rho \cdot g \cdot x}{\sigma_{x,эм}^{раст}} \right)^{\frac{1}{\alpha_x^{раст}}} \frac{\alpha_x^{раст} \cdot x}{1 + \alpha_x^{раст}}}}$$

Физически более интересным вариантом является методика определения влияния реологических параметров материала нити на ее собственные частоты. Будем предполагать, что решение задачи с учетом реологии материала нити является квазистатической задачей, т.е. реологические процессы в нити происходят настолько долго, что не оказывают влияния на динамическое уравнение ее колебания под действием силы тяжести (8).

В данном случае наследственные уравнения состояния для одноосной нелинейной ползучести материала нити приобретают вид [5, 6]:

$$\mathfrak{S}(\varepsilon_x(x, t)) = \sigma(x) \cdot \left(1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right), \quad (26)$$

либо для однородно стареющего вязкоупругого материала [6-7]:

$$\varepsilon_x(x, t) = \frac{\sigma(x)}{E(t)} \left(1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right). \quad (27)$$

С учетом (21) уравнения (26) и (27) дают следующие значения для вычисления длины $l(t)$ нити:

$$l_1(t) = l' + \int_0^{l'} \mathfrak{S}^{-1} \left(\rho \cdot g \cdot x \cdot \left(1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right) \right) dx, \quad (28)$$

$$l_2(t) = l' + \int_0^{l'} \frac{\rho \cdot g \cdot x}{E(t)} \left(1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right) dx, \quad (29)$$

где $\Gamma(t, \tau)$ – ядро ползучести, $E(t)$ – мгновенный модуль упругости.

В этом случае собственные частоты нити, удлиняющейся из-за ползучести ее материала, определяются для нелинейного (28) и линейного (29) наследственных уравнений как (рис. 2):

$$\omega_{i,1}(t) = \frac{\mu_i}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{\ell' + \int_0^{\ell'} \mathfrak{S}^{-1} \left(\rho \cdot g \cdot x \cdot \left(1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right) \right) dx}}, \quad (30)$$

$$\omega_{i,2}(t) = \frac{\mu_i}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{\ell' + \frac{\rho \cdot g \cdot \ell'^2}{2 \cdot E(t)} \left(1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right)}}.$$

Композиционная нить без учета реологических процессов.

Пусть $\langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \rho_k$ – средняя плотность материала нити на интервале (x_1, x_2) , где ρ_k – плотность k -ой компоненты композиционного материала, а γ_k – ее объемная доля. С учетом характера вывода уравнения (8) она сократится и в результирующем выражении участвовать не будет. Однако эта величина важна при определении напряженного состояния нити в соответствии с формулой (21), т.е. для композиционного материала будет выполнено:

$$\langle \sigma_x(x) \rangle = \langle \rho \rangle \cdot g \cdot x. \quad (31)$$

Самым простым способом решения поставленной задачи является установление связи средней деформации нити при растяжении под действием силы тяжести $\langle \varepsilon_x(x) \rangle$ со средним напряжением натяжения $\langle \sigma_x(x) \rangle$ с использованием простейшего уравнения состояния $\langle \varepsilon_x \rangle = \mathfrak{S}^{-1} \langle \sigma_x(x) \rangle$.

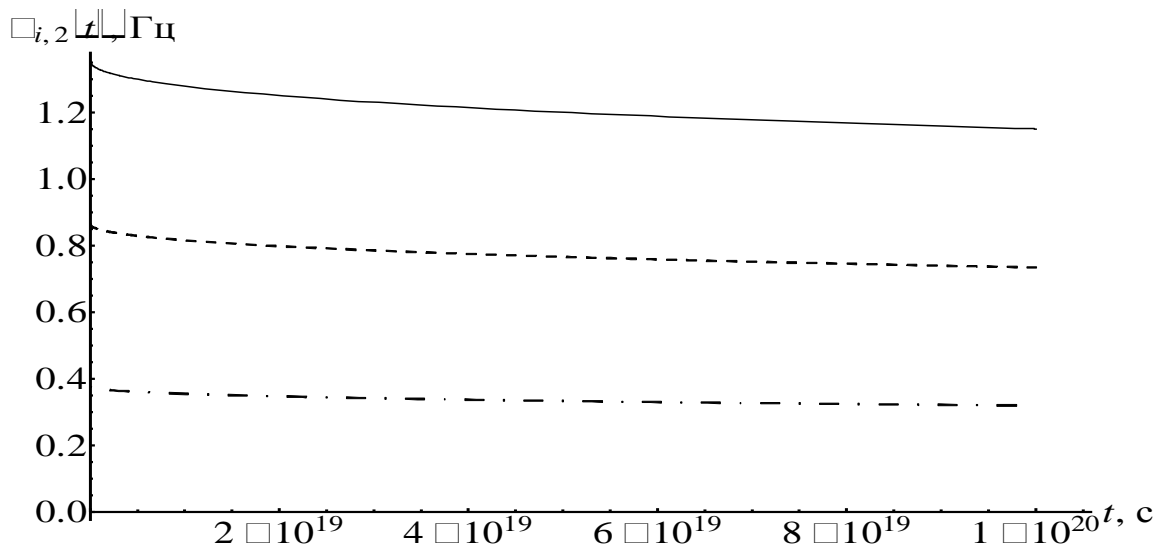


Рис. 2. Зависимость от времени t низших собственных частот $\omega_{1,2}(t)$ (штрихпунктирная линия), $\omega_{2,2}(t)$ (пунктирная линия), $\omega_{3,2}(t)$ (непрерывная линия) (30) вязкоупругой нити длиной $\ell' = 100$ м ($E(t) = E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7850$ кг/м³, ядром ползучести в виде ядра Дюффинга $\Gamma(t, \tau) = 10^{-6} \cdot (t - \tau)^{-1/2}$ [5], при $\mu_1 = 2.40, \mu_2 = 5.52, \mu_3 = 8.65$ [2])

Обратим внимание на то, что малые колебания нити не предполагают вообще никаких дополнительных продольных деформаций нити при движении, кроме наличия априорно заданного переменного по длине нити растяжения под действием силы тяжести. Поэтому при определении последнего можно использовать в полной мере все имеющиеся возможности анализа одноосно деформируемого композиционного стержня, соответствующего отрезку нити (x_1, x_2) [4], с тем отличием, что в [4] рассмотрено его сжатие.

В соответствии с общей методикой, примененной для решения задачи определения эффективных параметров участка нити (стержня), рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в нити, т.е. в данном случае рассматривается растяжение призматического стержня, имитирующего нитку на участке (x_1, x_2) [4]. В связи с отсутствием зависимости параметров уравнения колебаний нити

от формы поперечного сечения, для простоты получения уравнений предполагается, что сечение S нити квадратное площадью $\sqrt{S} \times \sqrt{S}$.

Принцип реализации метода гомогенизации для призматического стержня квадратного сечения заключается в следующем: если армированный материал состоит из N компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование и т.п.), то можно использовать гипотезу Фойгта для призматического стержня о том, что в простейших опытах на чистое растяжение/сжатие предполагается, что деформации по всему объему композиционного материала призматического стержня постоянны. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что в тех же простейших экспериментах на растяжение предполагается, что напряжения по всему объему композиционного материала призматического стержня (нити) в среднем постоянны.

Полученные на основании этих гипотез формулы, имеют практическую ценность, так как являются соответственно верхней и нижней оценкой истинных модулей композиционного материала [6].

Рассмотрим линейно-деформируемый композиционный материал нити из n линейно-деформируемых компонент с модулями упругости E_k и объемными долями γ_k , тогда напряжение натяжения $\langle \sigma_x(x) \rangle$ в (21) определяется по заданной средней деформации нити $\langle \varepsilon_x(x) \rangle$ как [4]:

$$\langle \varepsilon_x(x) \rangle = \langle \sigma_x(x) \rangle / \langle E_x \rangle_X, \quad (32)$$

где

$$\langle E_x \rangle_X = \left(1 + \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot E_k \right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right) / \left(2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right).$$

Из (24) и (31) следует, что собственные частоты определяются уравнением:

$$\omega_i = \frac{\mu_i}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{\ell' + \langle \rho \rangle \cdot g \cdot \ell'^2 / 2 \langle E_x \rangle_X}}. \quad (33)$$

При рассмотрении композиционного нелинейно-деформируемого материала нити из n компонент с объемными долями γ_k , диаграмма деформации каждой компоненты которого имеет выраженный начальный линейный участок, следует воспользоваться эффективной билинейной диаграммой Прандтля, построенной в приближении Хилла [4]:

$$\langle \varepsilon_x(x) \rangle = \begin{cases} \frac{\langle \rho \rangle \cdot g \cdot x}{\langle E_x \rangle_X}, & 0 \leq \langle \rho \rangle \cdot g \cdot x < \langle \sigma_{x,T}^{расм} \rangle_X, \\ \frac{\langle \rho \rangle \cdot g \cdot x}{\langle E_{x,T}^{расм} \rangle_X} - \left(1 - \frac{\langle E_{x,T}^{расм} \rangle_X}{\langle E_x \rangle_X} \right) \frac{\langle \sigma_{x,T}^{расм} \rangle_X}{\langle E_{x,T}^{расм} \rangle_X}, & \langle \sigma_{x,T}^{расм} \rangle_X \leq \langle \rho \rangle \cdot g \cdot x, \end{cases} \quad (34)$$

где эффективные упругопластические характеристики композиционного материала нити:

$$\begin{aligned} \langle E_x \rangle_X &= \left(1 + \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot E_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right) \right) / \left(2 \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right), \\ \langle E_{x,T}^{расм} \rangle_X &= \left(1 + \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot E_{T,k}^{расм} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{расм}} \right) \right) / \left(2 \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{расм}} \right), \\ \langle \sigma_{x,T}^{расм} \rangle_X &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{расм}} \right)^{-1} \left(\left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{T,k}^{расм} \cdot \left(\frac{E_k - E_{T,k}^{расм}}{E_{T,k}^{расм} \cdot E_k} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \left(1 - \frac{E_{T,k}^{расм}}{E_k} \right) \sigma_{T,k}^{расм} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{расм}} \right) \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\left(1 + \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot E_{T,k}^{расм} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{расм}} \right) \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{расм}} \right) \cdot \left(1 + \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot E_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right) \right)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

В (34) предполагается, что деформационная кривая каждого материала, входящего в состав нити, при его растяжении определяется билинейной диаграммой Прандтля [4]. Это означает, что механические свойства E_k (модуль упругости), $E_{T,k}^{расм}$ (второй модуль упругости при растяжении), $\sigma_{T,k}^{расм}$ (условные напряжения изменения модуля упругости на второе значение и обратно) известны для каждой компоненты композиционной нити с номером k ($k = \overline{1, n}$).

Из условия наличия неоднородностей в материале нити в соответствии с характером вывода уравнения (2)-(7) можно утверждать, что количеством N достоверно вычисленных частот (24) и соответственно слагаемых в (18) для композиционной нити является значение, удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{\ell}{N} \gg x_2 - x_1,$$

т.е. длина волны ℓ/N , должна быть больше размера неоднородности минимум в 10 раз. Таким образом, в самом худшем для исследователя случае (24) позволяет определить низшую частоту колебания композиционной нити (при $i = 1$), подвешенной за один конец.

Реология композиционной структурно неоднородной нити по наследственной теории. Продемонстрируем методику учета реологических композиционных свойств нити, которую можно применять, например, при анализе металлополимерных нитей. Будем рассматривать самый простой вариант, т.е. линейное уравнение (27) (вязкоупругий однородно стареющий материал).

Согласно разработанной в [6] методике, окончательно можно записать уравнение состояния и эффективные параметры структурно неоднородного в среднем изотропного вязкоупругого однородно стареющего материала нити:

$$\varepsilon_z(x, t) = \frac{\sigma_z(x)}{\langle E(t) \rangle_X} \left[1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right], \quad (35)$$

где

$$\langle E(t) \rangle_X = \left(1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k(t) \right) \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right) / \left(2 \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right),$$

$$\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X = \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \cdot \Gamma_k(t, \tau)}{E_k(t)} / \left(2 \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Gamma_k(t, \tau).$$

Влияние реологических параметров композиционной нити на собственные частоты колебаний. Исходя непосредственно из (27), (31) и (35), аналогично (29) и (30) получаем (рис. 3):

$$\ell(t) = \ell' + \frac{\langle \rho \rangle \cdot g \cdot \ell'^2}{2 \langle E(t) \rangle_X} \left(1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right),$$

$$\omega_i(t) = \frac{\mu_i}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{\ell' + \frac{\langle \rho \rangle \cdot g \cdot \ell'^2}{2 \langle E(t) \rangle_X} \left(1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right)}} \quad (i = \overline{1, N}), \quad (36)$$

где N определяется, как и ранее, из соотношения длины волны с номером N с длиной вдоль оси Ox макроточки композиционного тела $x_2 - x_1$.

Наличие металлов в композиции с полимером учитывается согласно методике предложенной в [6] – соответствующие номерам металлов $\Gamma_k(t, \tau) = 0$, а $E_k(t) = E$ – константы в (35), (36).

Замечания об использовании технической теории старения для моделирования реологии однородной и композиционной нити. В частности предположить, что уравнение ползучести имеет вид [8]:

$$\varepsilon(x, t) = \mathfrak{S}^{-1} \left(\frac{\sigma_x(x)}{\Psi(t)} \right), \quad (37)$$

где $\Psi(t)$ – функция релаксации. Однако из-за особенностей поставленной задачи (постоянства напряжений в точке с координатой x нити), ее решение с помощью соотношения (37) ничем не отличается от результатов, полученных с помощью (35).

Отметим, что методика усреднения параметров в общем случае деформационных характеристик $\mathfrak{S}_k(\)$ компонентов неоднородной нити полностью совпадает с методикой усреднения одноосно нагруженного стержня, изложенной в [4]. Усреднение же функций релаксации $\Psi_k(t)$ сведется к простейшим арифметическим операциям.

Дополнительно можно сделать замечание, что усреднение в линейном случае $\mathfrak{S}_k(\)$ даст результаты совершенно аналогичные (36).

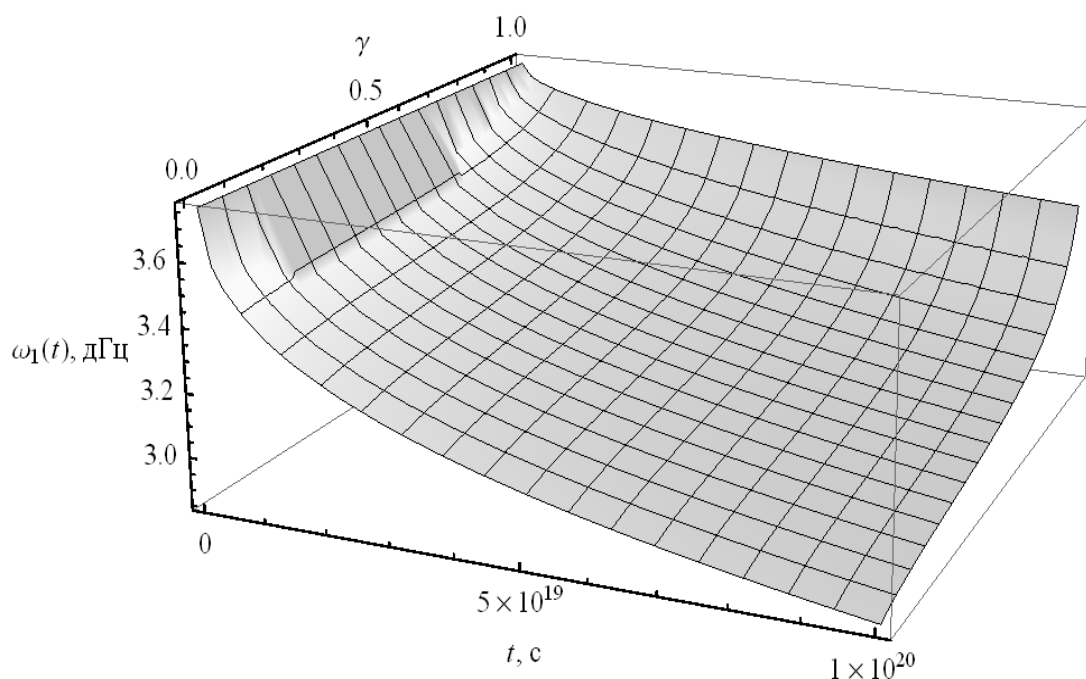


Рис. 3. Зависимость низшей собственной частоты $\omega_1(t)$ (36) композиционной металлополимерной нити длиной $\ell = 100$ м от времени t и концентрации γ первой компоненты двухкомпонентной смеси ($E_1(t) = E_1 = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $E_2(t) = E_2 = 0.2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho_1 = 8000$ кг/м³, $\rho_2 = 1500$ кг/м³ и ядрами $\Gamma_1(t, \tau) = 0$, $\Gamma_2(t, \tau) = 10^{-6} \cdot (t - \tau)^{-1/2}$, при $\mu_1 = 2.40$ [2])

Выводы. Получены эффективные значения собственных частот колебаний деформируемой композиционной нити, подвешенной за один из концов, под действием силы тяжести в приближении Хилла эффективных характеристик для материала нити с учетом деформационных и реологических параметров компонент.

При получении решения для однородной и композиционной нити из реологически активного материала использовалась наследственная теория ползучести, а также техническая теория старения.

Список использованных источников

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М: Наука, 1986. 544 с.
4. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Применение простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины в механике твердого тела // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 1. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>
5. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
6. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Моделирование ползучести по наследственной теории в простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 2. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>
7. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М: Стройиздат, 1968. 418 с.
8. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.