УДК 539.3

# НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ИЗЛУЧЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМ СЛОЕМ, КОТОРЫЙ КОНТАКТИРУЕТ С ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕН ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

**Бабаев Александр Арташесович**

канд. физ.-мат. наук

**Штефан Наталья Ильинична**

канд. тех. наук

**Гнатейко Нонна Валентиновна**

канд. тех. наук

Киевский политехнический институт, Киев (Украина)

*author@apriori-journal.ru*

**Аннотация.** Данная статья посвящена нестационарным режимам излучения акустических волн пьезокерамическим слоем, который контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью и ограничен жесткой поверхностью. Выполнена постановка и метод решения задачи. Получены формулы для определения физических характеристик исследуемого переходного процесса.

**Ключевые слова:** пьезокерамический слой; преобразование по Лапласу; электроупругость; акустическая среда.

**THE NONSTATIONARY MODES OF RADIATION OF ACOUSTIC WAVES A PIESOCERAMIC LAYER WHICH CONTACTS TO THE IDEAL COMPRESSED LIQUID AND IT IS LIMITED BY A RIGID SURFACE**

**Babaev Alexander Artashesovich**

candidate of physical and mathematical sciences

**Shtefan Natal'ja Il'inichna**

candidate of technical sciences

**Gnatejko Nonna Valentinovna**

candidate of technical sciences

Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv (Ukraine)

**Abstract.** This article is devoted to the non-stationary modes of radiation of acoustic waves by a piezoceramic layer which contacts to the ideal compressed liquid and is limited by a rigid surface. Setting and a method of the solution of the task is executed. Formulas for determination of physical characteristics of the researched transient phenomenon are received.

**Key words:** piezoceramic layer; conversion according to Laplace; electroelasticity; acoustic environment.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается бесконечно длинный в продольном направлении пьезокерамический слой, который контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью и возбуждается нестационарными электрическими импульсами, которые подводятся непосредственно на токопроводящие поверхности. Считается, что пьезокерамический слой (рис. 1) поляризован в радиальном направлении и имеет толщину $h_1$ , контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью толщиной $h_2$ плотностью $\rho$ и скоростью звука *c*.

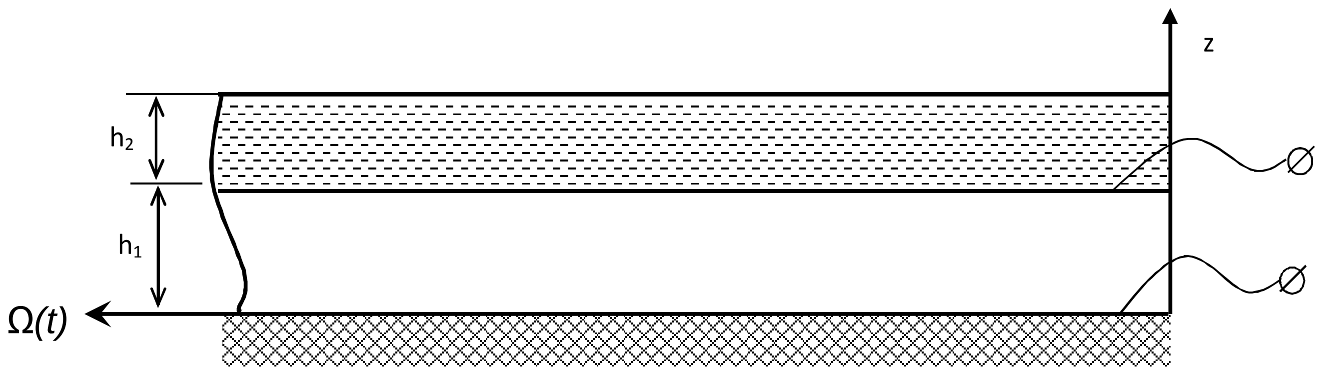


**Рис. 1.**

При описании переходных процессов в данной гидроэлектроупругой системе используется соотношения линейной теории связанной электроупругости и акустического приближения. С учетом сделанных предположений исходная система включает в себя уравнение движения пьезокерамического слоя

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где $a^2 = \dfrac{\rho_m \varepsilon_{33}^s c^2}{C_{33}^E \varepsilon_{33}^s + e_{33}^2}$,

уравнение вынужденной электростатики (уравнение Максвелла)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^s} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

механического напряжения, которое возникает в пьезокерамическом слое

$$\sigma_z = C_{33}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \tag{3}$$

волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{4}$$

соотношения между гидродинамическим давленим и волновым потенциалом:

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{5}$$

где $\varphi$ – потенциал скорости. Напряженность $E_Z$, индуктивность *D* и перемещения $u_z$, которые возникают в пьезокерамическом слое связаны следующими соотношениями

$$E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \tag{6}$$

$$D_z = -\varepsilon_{33}^s \frac{\partial \Psi}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{7}$$

Постановку задачи (1)-(7) необходимо дополнить граничными условиями. Перемещения, которые возникают на жесткой поверхности равны нулю ($z$ = 0)

$$u_z \Big|_{z=0} = 0. \tag{8}$$

Также выполняется условие равенства скоростей в пьезокерамическом слое и идеальной сжимаемой жидкости (на поверхности пьезокерамического слоя $z = h_1$)

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}\Big|_{z=h_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=h_1}. \tag{9}$$

Равенство механического напряжения в пьезокерамическом слое и гидродинамического давления в месте контакта с жидкостью ($z = h_1$)

$$\sigma_z \Big|_{z=h_1} = -p\Big|_{z=h_1}, \tag{10}$$

и условие которое обеспечивает равенство нулю на жесткой поверхности скорости ($z = h_1 + h_2$) которая распространяется в жидкость

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=h_1+h_2} = 0. \tag{11}$$

На токопроводящие покрытия пьезокерамического слоя подается нестационарный электрический сигнал $\Omega(t)$.

$$\Psi\big|_{z=0} = -\Omega(t)H(t), \;\; \Psi\big|_{z=h_1} = \Omega(t)H(t) \tag{12}$$

где *H(t)* – единичная функция Хевисайда.

Начальные условия – нулевые.

**2. Решение задачи.** Решение задачи находилось с применением интегрального преобразования Лапласа по времени. В пространстве изображений исходная система уравнений (1)-(7) и граничные условия (8)-(12) принимают вид (отметим, что в дальнейшем постановка задачи и ее решение было выполнено с учетом безразмерных коэффициентов согласно которым величины $u_z$,$h_1$, $h_2$, $z$ отнесены к толщине слоя жидкости $h_1$ : $u$, $\Psi$ – к $h_2/d_{33}$; $p$, $\sigma_z$ – к $\rho c^2$; $\varphi$, $V_z$ – к $h_2 c$; $E$ – *до* $1/d_{33}$; $t$ –к $h_2/c$; $D_z$ – $\varepsilon^s{}_{33}/d_{33}$):

$$\frac{\partial^2 u_z^L}{\partial z^2} - a^2 s^2 u_z^L = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial z^2} - b\frac{\partial^2 u_z^L}{\partial t^2} = 0, \text{ где } b = \frac{e_{33} d_{33}}{\varepsilon_{33}^s} \tag{14}$$

$$\sigma_z^L = \frac{C_{33}^E}{\rho c^2}\frac{\partial u_z^L}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\rho c^2 d_{33}}\frac{\partial \Psi^L}{\partial z} \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial z^2} - s^2 \varphi^L = 0, \tag{16}$$

$$u_z^L\big|_{z=0} = 0, \tag{17}$$

$$s u_z^L\big|_{z=h_1} = \frac{\partial \varphi^L}{\partial z}\Big|_{z=h_1}, \tag{18}$$

$$\sigma_z^L\big|_{z=h_1} = -p^L\big|_{z=h_1}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \varphi^L}{\partial z}\Big|_{z=h_1+h_2} = 0, \tag{20}$$

$$\Psi\big|_{z=0} = -\Omega^L(s), \;\; \Psi\big|_{z=h_1} = \Omega^L(s). \tag{21}$$

Тут индексом *L* обозначены соответствующие трансформанты, *s* – параметр преобразования по Лапласу. Из системы уранений (13)-(21) получим формулы для:

нормального перемещения пьезокерамического слоя

$$u_z{}^L = C_1{}^l(s)\frac{1}{s}e^{-asz} + C_2{}^l(s)\frac{1}{s}e^{-as(h_1-z)} \tag{22}$$

электрического потенциала

$$\Psi^L = b\left[C_1^L(s)\frac{1}{s}e^{-asz} + C_2^L(s)\frac{1}{s}e^{-as(h_1-z)} + C_5{}^L(s)z + C_6^L(s)\right] \tag{23}$$

механического напряжения пьезокерамического слоя

$$\sigma_z^L = -maC_1^L(s)e^{-asz} + maC_2^L(s)e^{-as(h_1-z)} + nC_5^L(s), \tag{24}$$

где $m = \dfrac{C_{33}^E\varepsilon_{33}^s + e_{33}^2}{\rho c^2\varepsilon_{33}^s}, \quad n = \dfrac{e_{33}^2}{\rho c^2\varepsilon_{33}^s}$

волнового уравнения

$$\varphi^L = C_3{}^L(s)\frac{1}{s}e^{-s(z-h_1)} + C_4{}^L(s)\frac{1}{s}e^{-s(h_1+h_2-z)} \tag{25}$$

и гидродинамического давления

$$p^L = -C_3{}^L(s)e^{-s(z-h_1)} - C_4{}^L(s)e^{-s(h_1+h_2-z)}. \tag{26}$$

После подстановки полученных соотношений (22)-(26) в трансформированные по Лапласу граничные условия (17)-(21) получим систему пяти уравнений относительно неизвестных функций $C_2^L(s)$, $C_3^L(s)$, $C_4^L(s)$, $C_5^L(s)$, $C_6^L(s)$

$$\begin{gathered}
C_2^L(s) + C_3^L(s) = C_4^L(s)e^{-ash_2} + C_2^L(s)e^{-2ash_1}, \\
maC_2^L(s) - C_3^L(s) + nC_5^L(s) = C_3^L(s)e^{-sh_2} - maC_2^L(s)e^{-2ash_1}, \\
C_4^L(s) = C_3^L(s)e^{-sh_2}, \quad C_6^L(s) = -\Omega^L(s), \\
C_2^L(s)\frac{1}{s} + C_5^L(s)h_1 + C_6^L(s) = \Omega^L(s) + bC_2^L(s)\frac{1}{s}e^{-2ash_1}.
\end{gathered} \tag{27}$$

При решении системы уравнений (27) и нахождения неизвестных функций $C_2^L(s)$, $C_3^L(s)$, $C_4^L(s)$, $C_5^L(s)$, $C_6^L(s)$ возникает необходимость раскрытия определителя в явном виде. Это связано с математическими трудностями принципиального характера. Предлагается выполнить инверсию каждого уравнения – непосредственно, и удовлетворить граничным условиям в пространстве оригиналов. В результате система уравнений (27) будет иметь вид:

$$
\begin{gathered}
C_2(t) + C_3(t) = C_4(t - ah_2) + C_2(t - 2ah_1), \\
maC_2(t) - C_3(t) + nC_5(t) = C_3(t - h_2) - maC_2(t - 2ah_1), \\
C_4(t) = C_3(t - h_2), \quad C_6(t) = -\Omega(t), \\
\int_0^t C_2(\tau)d\tau + C_5(t)h_1 + C_6(t) = \Omega(t) + b\int_0^{t-2ah_1} C_2(\tau)d\tau.
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Система уравнений (28) была получена с использованием теоремы про свертку оригиналов и таблиц операционного исчисления [5]. Полученная система интегральных уравнений (28) может быть решена численно путем разбиения временного интервала на отрезки и использования на каждом шаге по $t$ метода квадратурных формул [3]. Сдвиг в аргументах у неизвестных которые входят в правые части уравнений позволяют находить решения уравнений шаг за шагом, независимо. В результате находятся неизвестные функции $C_2(t), C_3(t), C_4(t), C_5(t), C_6(t)$. После их нахождения определяются физические характеристики исследуемого переходного процесса, такие как:

гидродинамическое давление

$$p(t) = -C_3(t - h_1 - h_2 + z) - C_4(t - z + h_1), \tag{30}$$

перемещения пьезокерамического слоя

$$u(t,z) = \int_0^{t-az} C_1(\tau)d\tau + \int_0^{t-(ah_1-z)} C_2(\tau)\,d\tau \tag{31}$$

и механического напряжения пьезокерамического слоя

$$\sigma(t,z) = -maC_1(t - az) + maC_2(t - a(h_1 - z)) + nC_5(t). \tag{32}$$

## Список использованных источников


1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1978. 291 с.
2. Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н., Гринченко В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6-ти т. Т. 5. Динамика упругих тел. К.: Наукова думка, 1986. 286 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 108 с.
4. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Т. 5. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наукова думка, 1989. 280 с.
5. Диткин В.А., Прудников А.О. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 466 с.
6. Пьезокерамические преобразователи / под ред. С.И. Пугачева. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.
7. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.