

УДК 539.3

**ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ПОКРЫТИЯ ПОСТОЯННОЙ
ТОЛЩИНЫ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Кравчук Александр Степанович

д-р физ.-мат. наук

Кравчук Анжелика Ивановна

канд. физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)

author@apriori-journal.ru

Аннотация. В статье на примере решения контактных задач предлагается естественное обобщение модели основания Винклера, когда учтены многие возможные варианты уравнений состояния материала деформируемого покрытия. Кроме линейно-упругой деформации элементов однослойного покрытия впервые рассматриваются линейно-деформируемое слоистое, композиционное, нелинейно-деформируемое слоистое и композиционное покрытия. Нелинейность моделируется как билинейной диаграммой Прандтля, так и степенной функцией, что выполняется впервые. Процесс разгрузки не рассматривается.

Ключевые слова: Основание Винклера; уравнения состояния; линейно-деформируемый материал; нелинейно-деформируемый материал; композиционный материал; слоистый материал.

APPLICATION OF A SIMPLE MODEL OF A DEFORMED COATING OF CONSTANT THICKNESS IN SOLID MECHANICS

Kravchuk Alexander Stepanovich

doctor of physical and mathematical sciences

Kravchuk Anzhelica Ivanovna

candidate of physical and mathematical sciences
Belarusian State University, Minsk (Belarus)

Abstract. The article is devoted to the natural generalization of the Winkler foundation. It is considered many possible equations of state of a deformable coating. Besides linear elastic deformation of the single-layer coating in paper it is considered linearly deformable laminated, composite, nonlinear laminated deformable and composite coating. Nonlinearity is modeled by a bilinear diagram Prandtl and power function. The unloading process is not considered.

Key words: Winkler base; equation of state; linearly deformable material; nonlinear deformable material; composite material; laminate material.

Введение. В современной научной литературе, посвященной механике твердого тела, в качестве возможности постановки новой теоретической краевой задачи зачастую используется основание Винклера. Это распространённый прием используется как в теории контактных задач [1], так и в теории оболочек [2; 3] для приближения свойств исследуемого объекта к реально существующему или формального фиксирования новизны решаемой краевой задачи [4; 5].

Данная работа призвана несколько расширить круг решаемых теоретических краевых задач механики твердого тела и существенно приблизить теоретические модели к определению напряженного состояния реально существующих объектов.

Простейшей моделью деформируемого покрытия будем называть слой на жестком полупространстве, который рассматривается не как сплошное тело, а заменяется набором призматических элементов с квадратным сечением, способных деформироваться только в одном направлении без взаимодействия между собой (т.е. без трения). При этом поперечное сечение элементов считается малым по сравнению с областью контакта, а уравнение состояния призматического элемента имеет вид $\sigma = \mathcal{I}(\varepsilon)$.

В случае линейной связи напряжений и деформаций элемента модели покрытия данная модель носит название «основание Винклера», ее можно представить как пружинный матрац [6].

Отметим еще одну очень важную особенность простейшей модели деформируемого покрытия – она верна также и при конечных деформациях, что особенно важно для решения любых практических задач, в частности, задач упругопластического или пластического внедрения инденторов (определение твердости поверхности).

Основные гипотезы, используемые в простейшей модели деформируемого покрытия. Предполагается, что поверхность покрытия плоская. Это значит, что отклонения поверхности малы в сравнении с глубиной внедрения пирамидального индентора. Композиционное покрытие покрывает гладкое жесткое полупространство.

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями с постоянным квадратным сечением $\Delta \times \Delta$ в плоскости XOY и высотой h (Рис. 1). Стержни могут перемещаться только в Z -направлении, при этом их напряженно-деформированное состояние призматического элемента является однородным [6]. Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с наименьшим характерным размером области контакта в плоскости XOY (Рис. 1).

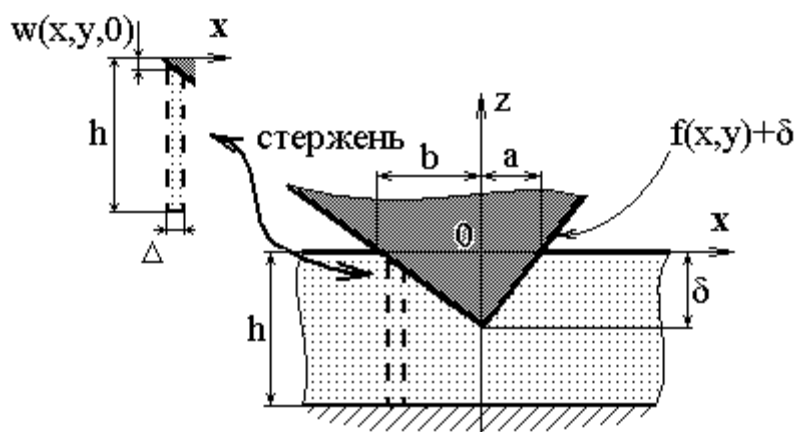


Рис. 1. Внедрение криволинейного индентора в простейшую модель деформируемого покрытия

Краевое условие по перемещениям. В рамках задач механики контактного взаимодействия внедряемое в покрытие тело является недеформируемым, т.е. жестким штампом. Пусть открытое множество $S \subset X0Y$ является внутренностью области контакта, т.е. $S = \{(x, y) | \sigma_z(x, y, 0) \neq 0\}$, где $\sigma_z(x, y, 0)$ – контактные напряжения. Тогда замыкание \bar{S} является областью контакта. Учитывая, что в рамках простейшей модели деформируемого покрытия контактные напряжения $\sigma_z(x, y, 0) \neq 0$ могут возникнуть только в точке, в которой перемещение в области контакта $w(x, y, 0) \neq 0$, то внутренность области контакта гораздо проще определить как $S = \{(x, y) | w(x, y, 0) \neq 0\}$.

Пусть уравнение поверхности внедряемого недеформируемого штампа описывается уравнением $f(x, y)$, и точка $(0, 0, 0)$ является точкой первичного касания штампа и плоскости $X0Y$ [6]. Тогда краевое условие по перемещениям определяется следующим уравнением:

$$w(x, y, 0) = \begin{cases} f(x, y) + \delta, & (x, y) \in \bar{S}, \\ 0, & (x, y) \notin \bar{S}, \end{cases} \quad (1)$$

где δ – глубина максимального внедрения штампа. Она определяется из геометрических соображений, т.е. на границе области контакта $(x, y) \in \bar{S} \setminus S$ контактные перемещения равны нулю ($w(x, y, 0)|_{(x, y) \in \bar{S} \setminus S} = 0$). Принимая во внимание верхнее уравнение (1), получаем, что для любой достоверно определенной точки на границе области контакта $(x, y) \in \bar{S} \setminus S$ выполнено равенство:

$$\delta = -f(x, y)|_{(x, y) \in \bar{S} \setminus S}. \quad (2)$$

Формальное определение напряжений в области контакта без учета временных эффектов. Для определения напряжений, действующих в области контакта, достаточно использовать соответствующее поставленной задаче уравнение состояния $\sigma = \mathfrak{Z}(\varepsilon)$. Используя предположение о деформируемости призматических стержней только в Z -направлении и определения деформации стержня высотой h , получаем:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \mathfrak{Z}(\varepsilon(x, y, 0)) = \mathfrak{Z}\left(\frac{w(x, y, 0)}{h}\right) \text{ при } (x, y) \in \bar{S}. \quad (3)$$

Уравнения равновесия штампа на границе без учета временных эффектов. Уравнение (5) будет иметь параметры, которые должны определять конкретные размеры и форму области контакта по величине приложенной нагрузки. Задавая все константы уравнения состояния $\sigma = \mathfrak{Z}(\varepsilon)$, значения параметров, определяющих размеры области контакта, и, выполняя интегрирование контактных напряжений $\sigma_z(x, y, 0)$, из (5) можно определить величину необходимой для получения указанной области контакта силы P по формуле:

$$P = - \iint_{\bar{S}} \sigma_z(s) ds \quad (4)$$

После этого можно определить еще два опрокидывающих штампов главных момента M_x и M_y , действующих в плоскостях XOZ и YOZ и уравновешивающих несимметрично вдавливаемый штамп. Обычно предполагается, что штамп вдавливается симметрично, и главные моменты равны нулю $M_x = M_y = 0$.

Однослойное упругое покрытие. Рассмотрим случай линейной связи напряжений и деформаций. В этом случае:

$$\mathfrak{Z}(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon,$$

где E – модуль упругости изотропного однослойного покрытия. Уравнение (5) является уравнением состояния для модели Винклера. Тогда контактные напряжения определяются в соответствии с (3):

$$\sigma_z(x, y, 0) = E \frac{w(x, y, 0)}{h}. \quad (5)$$

Горизонтально слоистое упругое покрытие постоянной толщины. Перейдем к рассмотрению горизонтально слоистого покрытия постоянной толщины [7]. Для этого рассмотрим деформацию многослойного призматического стержня размером $\Delta \times \Delta \times h$ с координатами (x, y) на плоскости XOY , имитирующего деформацию покрытия в этой точке. Рассмотрим горизонтально слоистый стержень из N слоев. При этом k -ый слой ($k = \overline{1, N}$) имеет высоту h_k и модуль упругости E_k материала слоя (Рис. 2).

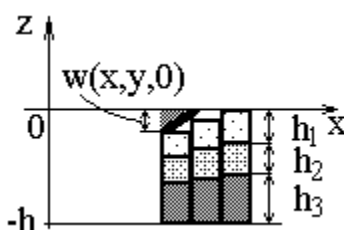


Рис. 2. Схема нагружения горизонтально слоистого стержня

Напряжения $\sigma_z(x, y, 0)$, действующие в области контакта S на весь стержень с координатами $(x, y) \in S$ (Рис. 1, 2), равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство $\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_z\left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i\right) = \sigma_{z,k}(x, y, 0) \quad \forall k = \overline{1, N}$. Следуя методике, изложенной в [7], получаем следующие уравнения для деформации $\varepsilon_{z,k}(x, y, 0)$ отдельного слоя с номером ($k = \overline{1, n}$) и координатами $(x, y) \in S$ при сжатии (Рис. 2):

$$\varepsilon_{z,k}(x, y, 0) = \varepsilon_z\left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i\right) = \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_k}. \quad (6)$$

Определим суммарные перемещения $w(x, y, 0)$ в Z -направлении для всего многослойного стержня с координатами $(x, y) \in S$ суммированием (6) для $k = \overline{1, n}$ [7]:

$$w(x, y, 0) = \sum_{k=1}^n w_k \left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i \right) = \sum_{k=1}^n h_k \cdot \varepsilon_{z,k}(x, y, 0) = h \cdot \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\langle E \rangle_p} \quad (7)$$

где усредненные коэффициенты $\langle E \rangle_R$ горизонтально слоистого призматического стержня определяются уравнениями:

$$\langle E \rangle_p = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}.$$

Необходимо обратить (7) и получить уравнение для $\sigma_z(x, y, 0)$ от $w(x, y, 0)$ для решения контактной задачи [7]:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \langle E \rangle_p \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h}. \quad (8)$$

Упругое композиционное структурно-неоднородное покрытие. Перейдем к моделированию композиционного упруго-деформируемого покрытия. Анализ литературных источников позволяет выделить следующий теоретический подход, используемый при исследовании процессов в структурно-неоднородных средах, основанный на введении параметров, усредненных по элементарным макрообъемам, значительно превосходящим размеры неоднородностей, но достаточно малым по сравнению с характерными размерами области взаимодействия тел. При таком методе основные уравнения механики сплошной среды формулируются в пространстве, точками которого являются элементарные макрообъемы (макроточки). Макроточкой называется элементарный макрообъем, размеры которого значительно превосходят характерные размеры неоднородностей, однако существенно меньше размеров тела. Будем предполагать, что призматические стержни с постоянным квадратным сечением шириной Δ и высотой h , используемые при построении простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины, представляют собой макроточку.

Общая схема нагружения элементарного макрообъема объема (макроточки) композиционного материала. Для решения задачи определения эффективных модулей рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в твердом теле, т.е. в данном случае рассматривается сжатие призматических стержней, находящихся под внедряемым штампом (Рис. 1).

Методика вычисления эффективных коэффициентов линейно-деформируемого композиционного материала. Принцип реализации метода гомогенизации для призматического стержня квадратного сечения из простейшей модели деформируемого покрытия (Рис. 1) заключается в следующем: если армированный материал состоит из N компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование и т.п.), то можно использовать гипотезу Фойгта для призматического стержня о том, что в простейших опытах на чистое растяжение/сжатие предполагается, что деформации по всему объему компо-

зиционного материала призматического стержня постоянны [8]. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что в тех же простейших экспериментах на растяжение/сжатие предполагается, что напряжения по всему объему композиционного материала призматического стержня постоянны [9].

Полученные на основании этих гипотез формулы, имеют практическую ценность, так как являются соответственно верхней и нижней оценкой истинных модулей композиционного материала [10].

Исходные данные для получения усредненных характеристик композиционных призматических стержней, моделирующих деформацию покрытия. Предполагается, что значения объемных долей γ_k ($k = \overline{1, N}$) (концентраций) компонент композиционного покрытия известны для покрытия в целом, и они же являются объемными долями компонент для каждого из стержней. При усреднении упругих характеристик композиционного материала стержня предполагается, что механические свойства E_k (модуль упругости) известны для каждой компоненты k ($k = \overline{1, N}$).

Применение гипотезы Фойгта для вычисления эффективных коэффициентов линейно-упругого материала из N компонент для призматического стержня [8]. В данном случае следует решить задачу усреднения параметров материалов, исходя из простого сжатия вертикально слоистого призматического стержня (Рис. 3), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородной деформации всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению. Более того, данная расчетная схема, очевидно, позволяет рассмотреть вертикально слоистый стержень не более чем из N слоев. При этом k -ый вертикальный слой ($k = \overline{1, N}$) имеет ширину, например, вдоль X-направления $\Delta_k = \gamma_k \cdot \Delta$, а вдоль Y-направления Δ (Рис. 4). Очевидно, что направления X и Y равнозначны, поэтому полученные далее результаты не зависят от их перестановки.

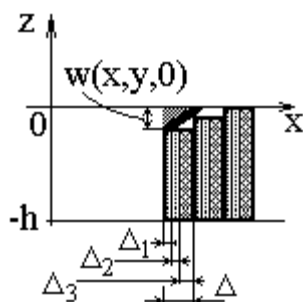


Рис. 3. Схема нагружения вертикально слоистого стержня

Усреднение упруго-пластических характеристик вертикально слоистого стержня. Деформации $\varepsilon_z(x, y, 0)$, действующие в области контакта \bar{S} на весь стержень с координатами $(x, y) \in \bar{S}$ (Рис. 3), равны соответствующим деформациям, действующим на все его вертикальные слои, т.е.

выполнено равенство $\varepsilon_z(x, y, 0) = \varepsilon_z \left(\left(x - \frac{\Delta}{2} + \sum_{i=1}^k \Delta_i \right), y, 0 \right) = \varepsilon_{z,k}(x, y, 0) = \frac{w(x, y, 0)}{h}$

$\forall k = \overline{1, N}$. Среднее напряжение $\langle \sigma_z(x, y) \rangle$, действующее на все вертикальные слои одного стержня можно определить как:

$$\langle \sigma_z(x, y) \rangle = \langle E \rangle_\phi \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h} \quad (9)$$

где усредненный по Фойгту модуль упругости вертикально слоистого призматического стержня определяются уравнениями:

$$\langle E \rangle_\phi = \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k.$$

Вычисление эффективных коэффициентов материала из N компонент для призматического стержня с помощью гипотезы Рейсса [9]. В данном случае следует воспользоваться решением задачи усреднения модулей упругости горизонтально слоистого покрытия постоянной толщины (8) (Рис. 2), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородном напряженном состоянии всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению.

Вычисление эффективной диаграммы деформирования структурно неоднородного композиционного материала покрытия. Следуя Хиллу [10], можно записать эффективную диаграмму деформирования материала композиционного покрытия, моделируемого призматическими стержнями. Исходя из (8), (9) для рассматриваемой модели структурно неоднородного покрытия постоянной толщины получаем:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \langle E \rangle_x \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h}, \quad (10)$$

где

$$\langle E \rangle_x = \frac{1}{2} (\langle E \rangle_p + \langle E \rangle_\phi) = \frac{1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k \right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k}}{2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k}}.$$

Нелинейно деформируемое однослойное покрытие, деформация которого моделируется билинейной диаграммой Прандтля. В данном случае для призматических стержней, моделирующих деформацию покрытия конечной толщины, необходимо рассмотреть следующее уравнение состояния (Рис. 4):

$$\mathfrak{S}(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon, & 0 \geq \varepsilon > \frac{\sigma_T^{сж}}{E}, \\ \sigma_T^{сж} + E_T^{сж} \cdot \left(\varepsilon - \frac{\sigma_T^{сж}}{E} \right), & \frac{\sigma_T^{сж}}{E} \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (11)$$

где E – модуль упругости покрытия, $\sigma_T^{сж}$ – предел текучести при сжатии (он отличается от предела текучести при растяжении), $E_T^{сж}$ – касательный модуль пластичности при сжатии. Параметр $E_T^{сж}$ определяет упрочнение материала.

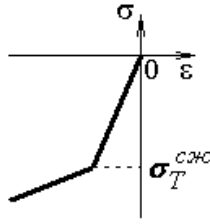


Рис. 4. Диаграмма Прандтля одноосного деформирования образца материала при сжатии

Уравнение (11) часто встречается в технических приложениях для моделирования упругопластической деформации твердого тела. Его можно использовать даже в случае геометрически больших перемещений в области контакта при испытаниях на твердость:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \begin{cases} E \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h}, & 0 \geq \frac{w(x, y, 0)}{h} > \frac{\sigma_T^{сжс}}{E}, \\ E_T^{сжс} \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h} + \left(1 - \frac{E_T^{сжс}}{E}\right) \cdot \sigma_T^{сжс}, & \frac{\sigma_T^{сжс}}{E} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h}. \end{cases} \quad (12)$$

Нелинейно деформируемое многослойное покрытие, деформация слоев которого описывается билинейной диаграммой Прандтля. Стержень в простейшей многослойной модели покрытия состоит из N слоев с высотами $h_{k, k=\overline{1, N}}$ (Рис. 1). Предполагается, что деформационная кривая каждого слоя при его сжатии или растяжении определяется билинейной диаграммой Прандтля (Рис. 4). Это означает, что механические свойства E_k (модуль упругости), $E_{T, k}^{сжс}$ (касательный модуль пластичности при сжатии), $\sigma_{T, k}^{сжс}$ (предел текучести при сжатии) известны для каждого слоя с номером k ($k = \overline{1, n}$).

Напряжения $\sigma_z(x, y, 0)$, действующие в области контакта \bar{S} на весь стержень с координатами $(x, y) \in \bar{S}$ (Рис. 1), равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство $\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_z\left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i\right) = \sigma_{z, k}(x, y, 0) \quad \forall k = \overline{1, N}$. Следовательно, мы получаем следующие уравнения для деформации $\varepsilon_{z, k} = \varepsilon_z\left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i\right)$ отдельного слоя с номером ($k = \overline{1, n}$) и координатами $(x, y) \in \bar{S}$ при сжатии (Рис. 3):

$$\varepsilon_{z, k} = \begin{cases} \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_k}, & 0 \geq \sigma_z(x, y, 0) > \sigma_{T, k}^{сжс}, \\ \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{E_{T, k}^{сжс}} + \left(\frac{E_{T, k}^{сжс} - E_k}{E_{T, k}^{сжс} \cdot E_k}\right) \cdot \sigma_{T, k}^{сжс}, & \sigma_{T, k}^{сжс} \geq \sigma_z(x, y, 0). \end{cases} \quad (13)$$

Определим суммарные перемещения $w(x, y, 0)$ в Z -направлении для всего многослойного стержня с координатами $(x, y) \in \bar{S}$ суммированием (13) умноженного на h_k для $k = \overline{1, n}$ [7]:

$$w(x, y, 0) = \sum_{k=1}^n h_k \cdot \varepsilon_{z,k} = \begin{cases} h \cdot \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\langle E \rangle_P}, & 0 \geq \sigma_z(x, y, 0) > \langle \sigma_T^{cж} \rangle_P, \\ h \cdot \frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\langle E_T^{cж} \rangle_P} + h \frac{\langle E_T^{cж} \rangle_P - \langle E \rangle_P}{\langle E_T^{cж} \rangle_P \cdot \langle E \rangle_P} \cdot \langle \sigma_T^{cж} \rangle_P, & \langle \sigma_T^{cж} \rangle_P \geq \sigma_z(x, y), \end{cases} \quad (14)$$

где усредненные коэффициенты $\langle E \rangle_P$, $\langle E_T \rangle_P$, $\langle \sigma_T^{compress} \rangle_P$ горизонтально слоистого призматического стержня определяются уравнениями:

$$\langle E \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}, \quad \langle E_T^{cж} \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{cж}} \right)^{-1},$$

$$\langle \sigma_T^{cж} \rangle_P = \left(\frac{\langle E_T^{cж} \rangle_P \cdot \langle E \rangle_P}{\langle E \rangle_P - \langle E_T^{cж} \rangle_P} \right) \cdot \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{T,k}^{cж} \cdot \left(\frac{E_k - E_{T,k}^{cж}}{E_{T,k}^{cж} \cdot E_k} \right).$$

Необходимо обратить (14) и получить уравнение для $\sigma_z(x, y, 0)$ от $w(x, y, 0)$ для решения контактной задачи:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \begin{cases} \langle E \rangle_P \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h}, & 0 \geq \frac{w(x, y, 0)}{h} > \frac{\langle \sigma_T^{cж} \rangle_P}{\langle E \rangle_P}, \\ \langle E_T^{cж} \rangle_P \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h} + \left(1 - \frac{\langle E_T^{cж} \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right) \cdot \langle \sigma_T^{cж} \rangle_P, & \frac{\langle \sigma_T^{cж} \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h}. \end{cases} \quad (15)$$

Нелинейно деформируемое композиционное структурно неоднородное покрытие, деформация компонент которого описывается билинейной диаграммой Прандтля. Принцип реализации метода гомогенизации для призматического стержня квадратного сечения из простейшей модели деформируемого покрытия (Рис. 1) заключается в применении гипотезы Фойгта для призматического стержня [8] и гипотезы Рейсса [9], описанных выше. Предполагается, что решения, полученные и в случае билинейной диаграммы Прандтля, являются верхней и нижней оценкой эффективных коэффициентов композиционного материала.

Гипотеза Фойгта для макроточки композиционного материала из N компонент, деформируемых в соответствии с билинейной диаграммой Прандтля. В данном случае следует решить задачу усреднения параметров материалов, исходя из простого сжатия вертикально слоистого призматического стержня (Рис. 3), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородной деформации всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению. Более того, данная расчетная схема, очевидно, позволяет рассмотреть вертикально слоистый стержень не более чем из N слоев. При этом k -ый вертикальный слой ($k = \overline{1, N}$) имеет ширину, например, вдоль X -направления $\Delta_k = \gamma_k \cdot \Delta$, а вдоль Y -направления Δ (Рис. 3). Очевидно, что в данном случае, как и

ранее, направления X и Y совершенно равнозначны, поэтому полученные далее результаты не зависят от их перестановки.

Деформация $\varepsilon_z(x, y, 0)$, действующая в области контакта S на весь стержень с координатами $(x, y) \in \bar{S}$ (Рис. 3), равны соответствующим деформациям, действующим на все его вертикальные слои, т.е. выполнено равенство $\varepsilon_z(x, y, 0) = \varepsilon_z\left(x - \frac{\Delta}{2} + \sum_{i=1}^k \Delta_i, y, 0\right) = \varepsilon_{z,k}(x, y, 0) \quad \forall k = \overline{1, N}$, где $\varepsilon_z(x, y, 0) = \frac{w(x, y, 0)}{h}$. Следовательно, мы получаем следующие уравнения

для напряжения $\sigma_{z,k}(x, y, 0) = \sigma_z\left(x - \frac{\Delta}{2} + \sum_{i=1}^k \Delta_i, y, 0\right)$ отдельного вертикального слоя с номером $(k = \overline{1, N})$ и координатами $(x, y) \in \bar{S}$ при сжатии (Рис. 3):

$$\sigma_{z,k}(x, y, 0) = \begin{cases} E_k \frac{w(x, y, 0)}{h}, & 0 \geq \frac{w(x, y, 0)}{h} > \frac{\sigma_{T,k}^{сж}}{E_k}, \\ \sigma_{T,k}^{сж} + E_{T,k} \left(\frac{w(x, y, 0)}{h} - \frac{\sigma_{T,k}^{сж}}{E_k} \right), & \frac{\sigma_{T,k}^{сж}}{E_k} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h}. \end{cases}$$

Тогда среднее напряжение $\langle \sigma_z(x, y) \rangle$, действующее на все вертикальные слои одного призматического стержня, можно определить как

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z(x, y) \rangle &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^N [\Delta_k \cdot \sigma_{z,k}(x, y, 0)] = \sum_{k=1}^N \left[\gamma_k \cdot \sigma_{z,k}\left(x - \frac{\Delta}{2} + \sum_{i=1}^k \Delta_i, y, 0\right) \right] \\ &= \begin{cases} \langle E \rangle_{\Phi} \frac{w(x, y, 0)}{h}, & 0 \geq \frac{w(x, y, 0)}{h} > \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle_{\Phi}}{\langle E \rangle_{\Phi}}, \\ \langle E_T^{сж} \rangle_{\Phi} \frac{w(x, y, 0)}{h} + \left(1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_{\Phi}}{\langle E \rangle_{\Phi}} \right) \langle \sigma_T^{сж} \rangle_{\Phi}, & \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle_{\Phi}}{\langle E \rangle_{\Phi}} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h}, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

где усредненные по Фойгту коэффициенты $\langle E \rangle_{\Phi}$, $\langle E_T \rangle_{\Phi}$, $\langle \sigma_T^{сж} \rangle_{\Phi}$, вертикально слоистого призматического стержня определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{\Phi} &= \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k, & \langle E_T^{сж} \rangle_{\Phi} &= \sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_{T,k}^{сж}, \\ \langle \sigma_T^{сж} \rangle_{\Phi} &= \left(\frac{\langle E \rangle_{\Phi}}{\langle E \rangle_{\Phi} - \langle E_T^{сж} \rangle_{\Phi}} \right) \sum_{k=1}^N \left(\gamma_k \cdot \left(1 - \frac{E_{T,k}^{сж}}{E_k} \right) \sigma_{T,k}^{сж} \right). \end{aligned}$$

Вычисление эффективных коэффициентов материала из N компонент для призматического стержня с помощью гипотезы Рейсса [9]. В данном случае следует воспользоваться решением задачи усреднения параметров диаграммы Прандтля горизонтально слоистого покрытия постоянной толщины (15) (Рис. 2), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородном напряженном состоянии всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению.

Вычисление эффективной диаграммы Хилла деформирования структурно неоднородного упруго-пластического композиционного

материала покрытия. Следуя Хиллу [10], можно записать эффективную диаграмму деформирования материала композиционного покрытия, моделируемого призматическими стержнями. Исходя из (15), (16), для рассматриваемой модели структурно неоднородного покрытия постоянной толщины получаем:

$$\langle \sigma_z(x, y) \rangle = \begin{cases} \langle E \rangle_X \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h}, & 0 \geq \frac{w(x, y, 0)}{h} > \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X}, \\ \langle E_T^{сж} \rangle_X \cdot \frac{w(x, y, 0)}{h} + \left(1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \right) \langle \sigma_T^{сж} \rangle_X, & \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h}, \end{cases} \quad (17)$$

где эффективные упруго-пластические характеристики композиционного материала:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_X &= \frac{1}{2} (\langle E \rangle_P + \langle E \rangle_\Phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)}{\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k}} \right), \\ \langle E_T^{сж} \rangle_X &= \frac{1}{2} (\langle E_T^{сж} \rangle_P + \langle E_T^{сж} \rangle_\Phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_{T,k}^{сж} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right)}{\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}}} \right), \\ \langle \sigma_T^{сж} \rangle_X &= \frac{\left(\left(1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_P}{\langle E \rangle_P} \right) \cdot \langle \sigma_T^{сж} \rangle_P + \left(1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_\Phi}{\langle E \rangle_\Phi} \right) \langle \sigma_T^{сж} \rangle_\Phi \right)}{2 \left(1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \right)} = \\ &= \frac{\left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{T,k}^{сж} \cdot \left(\frac{E_k - E_{T,k}^{сж}}{E_{T,k}^{сж} \cdot E_k} \right) \right) + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot \left(1 - \frac{E_{T,k}^{сж}}{E_k} \right) \sigma_{T,k}^{сж} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right)}{2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\left(1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_{T,k}^{сж} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right) \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_{T,k}^{сж}} \right) \cdot \left(1 + \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \cdot E_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right) \right)} \right)}. \end{aligned}$$

Применение степенной функции в уравнении состояния при моделировании нелинейно-деформируемого однослойного покрытия. В данном случае для призматических стержней, моделирующих деформацию покрытия конечной толщины необходимо рассмотреть следующее уравнение состояния (Рис. 5) [6]:

$$\mathfrak{S}(\varepsilon) = \sigma_T^{сж} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T^{сж}} \right)^{\alpha^{сж}}, \quad (18)$$

где $\sigma_T^{сж}$, $\varepsilon_T^{сж}$, $\alpha^{сж}$ ($\alpha^{сж} < 1$) – характерные для материала константы, определяемые исходя из аппроксимации с помощью (18) диаграммы одноосного сжатия образца материала. Например, для металлов в качестве $\sigma_T^{сж}$ можно взять предел текучести при сжатии материала, а в качестве $\varepsilon_T^{сж}$ соответствующую пределу текучести деформацию.

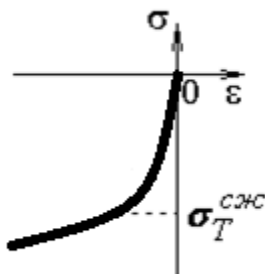


Рис. 4. Степенная аппроксимация одноосного деформирования образца материала при сжатии

Уравнение (18) также часто встречается в технических приложениях для моделирования развитой пластической деформации твердого тела. Его также как и (11) можно использовать даже в случае геометрически больших перемещений в области контакта:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_{эм}^{сж} \cdot \left(\frac{w(x, y, 0)}{h \cdot \varepsilon_{эм}^{сж}} \right)^{\alpha^{сж}}. \quad (19)$$

Степенная функция в уравнении состояния многослойного покрытия. Перейдем к рассмотрению горизонтально слоистого покрытия постоянной толщины. Для этого рассмотрим деформацию многослойного призматического стержня не более чем из N слоев размером $\Delta \times \Delta \times h$ с координатами (x, y) на плоскости XOY , имитирующего деформацию покрытия в этой точке (Рис. 2). При этом k -ый слой ($k = \overline{1, N}$) имеет высоту h_k и экспериментально определенные значения характерного напряжения $\sigma_{эм,k}^{сж}$, деформации $\varepsilon_{эм,k}^{сж}$ и показателя степени $\alpha_k^{сж}$, характеризующего упрочнение материала (Рис. 4).

Напряжения $\sigma_z(x, y, 0)$, действующие в области контакта S на весь стержень с координатами $(x, y) \in S$ (Рис. 1), равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство $\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_z\left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i\right) = \sigma_{z,k}(x, y, 0) \quad \forall k = \overline{1, N}$. Следуя методике, изложенной в [7], получаем следующие уравнения для деформации $\varepsilon_{z,k}(x, y, 0)$ отдельного слоя с номером ($k = \overline{1, n}$) и координатами $(x, y) \in S$ при сжатии (Рис. 2):

$$\varepsilon_{z,k}(x, y, 0) = \varepsilon_z\left(x, y, -h + \sum_{i=1}^k h_i\right) = \varepsilon_{эм,k}^{сж} \left(\frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\sigma_{эм,k}^{сж}} \right)^{\frac{1}{\alpha_k^{сж}}}. \quad (20)$$

Определим суммарные перемещения $w(x, y, 0)$ в Z -направлении для всего многослойного стержня с координатами $(x, y) \in S$ суммированием (22) для $k = \overline{1, n}$:

$$w(x, y, 0) = \sum_{k=1}^n h_k \cdot \varepsilon_{z,k}(x, y, 0) = h \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \varepsilon_{эм,k}^{сж} \left(\frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\sigma_{эм,k}^{сж}} \right)^{\frac{1}{\alpha_k^{сж}}} \approx h \cdot \langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P \cdot \left(\frac{\sigma_z(x, y, 0)}{\langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P} \right)^{\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \rangle_P} \quad (21)$$

Для того чтобы упростить приближение (21) с помощью усредненных коэффициентов $\langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P$, $\langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P$, $\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \rangle_P$, сделаем предположение, что:

$$\langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P \approx \left(\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{\sigma_{эм,k}^{сж}} \right)^{-1}. \quad (22)$$

Тогда можно получить уравнение для получения значения $\langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P$:

$$\langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P \approx \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \varepsilon_{эм,k}^{сж} \left(\frac{\langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P}{\sigma_{эм,k}^{сж}} \right)^{\frac{1}{\alpha_k^{сж}}}. \quad (23)$$

Кроме того, продифференцировав (21) по σ_z , получаем уравнение для определения $\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \rangle_P$:

$$\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \rangle_P \approx \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \varepsilon_{эм,k}^{сж} \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \left(\frac{\langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P}{\sigma_{эм,k}^{сж}} \right)^{\frac{1}{\alpha_k^{сж}} - 1}}{\langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P}. \quad (24)$$

Таким образом, усредненные коэффициенты $\langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P$, $\langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P$, $\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \rangle_P$ горизонтально слоистого нелинейно деформируемого призматического стержня определяются уравнениями (22), (23) и (24). Необходимо обратиться (21) и получить уравнение для $\sigma_z(x, y, 0)$ от $w(x, y, 0)$ для решения контактной задачи:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P \cdot \left(\frac{w(x, y, 0)}{h \cdot \langle \varepsilon_{эм}^{сж} \rangle_P} \right)^{\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \rangle_P^{-1}}. \quad (25)$$

Степенные функции в уравнении состояния композиционного структурно неоднородного покрытия. Принцип реализации метода гомогенизации для призматического стержня квадратного сечения из простейшей модели деформируемого покрытия (Рис. 1) заключается в применении гипотезы Фойгта для призматического стержня [8] и гипотезы Рейсса [9], описанных выше.

Применение гипотезы Фойгта для вычисления эффективных коэффициентов степенной функции, определяющей деформирование композиционного стержня. В данном случае следует решить за-

дачу усреднения параметров материалов исходя из простого сжатия вертикально слоистого призматического стержня (Рис. 3), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородной деформации всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению. Более того, данная расчетная схема, очевидно, позволяет рассмотреть вертикально слоистый стержень не более чем из N слоев. При этом k -ый вертикальный слой ($k = \overline{1, N}$) имеет ширину, например, вдоль X -направления $\Delta_k = \gamma_k \cdot \Delta$, а вдоль Y -направления Δ (Рис. 3). Очевидно, что в данном случае, как и ранее направления X и Y совершенно равнозначны, поэтому полученные далее результаты не зависят от их перестановки.

Деформация $\varepsilon_z(x, y, 0)$, действующая в области контакта S на весь стержень с координатами $(x, y) \in \bar{S}$ (Рис. 3), равны соответствующим деформациям, действующим на все его вертикальные слои, т.е. выполнено равенство

$$\varepsilon_z(x, y, 0) = \varepsilon_z \left(\left(x - \frac{\Delta}{2} + \sum_{i=1}^k \Delta_i \right), y, 0 \right) = \varepsilon_{z,k}(x, y, 0) \quad \forall k = \overline{1, N}, \quad \text{где}$$

$\varepsilon_z(x, y, 0) = \frac{w(x, y, 0)}{h}$. Следовательно, мы получаем следующие уравнения

для напряжения $\sigma_{z,k}(x, y, 0) = \sigma_z \left(\left(x - \frac{\Delta}{2} + \sum_{i=1}^k \Delta_i \right), y, 0 \right)$ отдельного вертикального слоя с номером ($k = \overline{1, N}$) и координатами $(x, y) \in \bar{S}$ при сжатии (Рис. 3):

$$\sigma_{z,k}(x, y, 0) = \sigma_{эм,k}^{сж} \left(\frac{w(x, y, 0)}{\varepsilon_{эм,k}^{сж} \cdot h} \right)^{\alpha_k^{сж}}.$$

Тогда среднее напряжение $\langle \sigma_z(x, y) \rangle_\phi$, действующее на все вертикальные слои одного призматического стержня можно определить как

$$\langle \sigma_z(x, y) \rangle_\phi = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^N [\Delta_k \cdot \sigma_{z,k}(x, y, 0)] = \sum_{k=1}^N \left[\gamma_k \cdot \sigma_{эм,k}^{сж} \left(\frac{w(x, y, 0)}{\varepsilon_{эм,k}^{сж} \cdot h} \right)^{\alpha_k^{сж}} \right]. \quad (26)$$

В данном случае вычисление эффективных коэффициентов не обязательно, т.к. (28) и в таком виде может быть использовано для решения контактной задачи, а вычисление эффективных коэффициентов (кроме кусочно-линейных функций) вносит в решение дополнительную погрешность.

Применение гипотезы Рейсса для нелинейно-деформируемого (в соответствии со степенной функцией) материала при решении контактной задачи из композиционного материала из N компонент [9]. В данном случае следует воспользоваться решением задачи усреднения параметров степенных уравнений состояния горизонтально слоистого покрытия постоянной толщины (25) (Рис. 2), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородном напряженном состоянии всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению.

Эффективная диаграмма деформирования нелинейно-деформируемого (в соответствии со степенной функцией) струк-

турно-неоднородного композиционного материала покрытия. Следуя Хиллу [10], можно записать эффективную диаграмму деформирования материала композиционного покрытия, моделируемого призматическими стержнями. Исходя из (25), (26) для рассматриваемой модели структурно неоднородного покрытия постоянной толщины получаем:

$$\langle \sigma_z(x, y, 0) \rangle = \frac{1}{2} \left[\langle \sigma_{эм}^{сж} \rangle_P \cdot \left(\frac{w(x, y, 0)}{h \cdot \langle \epsilon_{эм}^{сж} \rangle_P} \right)^{\langle \frac{1}{\alpha_k^{сж}} \rangle_P^{-1}} + \sum_{k=1}^N \left[\gamma_k \cdot \sigma_{эм,k}^{сж} \left(\frac{w(x, y, 0)}{\epsilon_{эм,k}^{сж} \cdot h} \right)^{\alpha_k^{сж}} \right] \right]. \quad (27)$$

Примеры решения конкретных задач. Изложенная выше теория позволяет решить все известные и важные с практической точки зрения задачи, которые можно поставить для слоя постоянной толщины и не учитывающие временные эффекты.

Решение плоских задач. При решении плоских задач всегда используется следующая методика: предполагается, что уравнение границы индентора касающегося плоского, ровного покрытия описывается уравнением от одной переменной x , т.е. $f(x, y) = f(x)$ (Рис. 5). Предполагается, что вторая переменная y в уравнении поверхности индентора произвольно изменяется на отрезке $[0, \ell]$, при этом линейный размер модели покрытия вдоль оси OY , на которой рассматривается внедрение штампа, также составляет ℓ . В этом случае область контакта \bar{S} составляет полоса $\bar{S} = [a, b] \times [0, \ell]$ (Рис. 5). Исходя из (1) можно поставить следующее краевое условие по перемещениям на границе слоя:

$$w(x) = \begin{cases} f(x) + \delta, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases} \quad (28)$$

где δ – глубина максимального внедрения штампа:

$$\delta = -f(x)|_{x=a \wedge b}. \quad (29)$$

Уравнение равновесия (4) примет вид (Рис. 5):

$$\frac{P}{\ell} = - \int_a^b \sigma_z(x) dx. \quad (30)$$

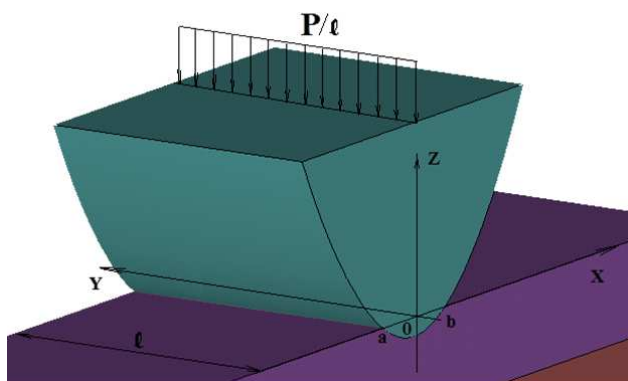


Рис. 5. Переход к решению плоской контактной задачи

Уравнение (30) показывает, что при решении плоских контактных задач при определении величины действующей силы, необходимой для получения области контакта $[a, b]$ на оси OX , определяем погонную нагрузку $\frac{P}{\ell}$, действующую равномерно на глубине ℓ плоской модели (Рис. 5). Для упрощения восприятия всегда делается предположение, что $\ell=1$ м и ширина призматического стержня Δ существенно меньше чем размер области контакта $\Delta \ll (b-a)$ (Рис. 1).

Параболический цилиндр. Пусть $f(x) = \frac{x^2}{2 \cdot R}$, где R – радиус кривизны индентора. Нагрузка P приложена вертикально вниз ($\ell=1$ м). Тогда (29) в силу симметрии тела глубина внедрения параболического цилиндра δ определяется по формуле:

$$\delta = -\frac{a^2}{2 \cdot R}. \quad (31)$$

где a – полуразмер симметричной области контакта $[-a, a]$. Тогда перемещения в области контакта (28) определяются следующим способом на $[-a, a]$:

$$w(x) = \frac{1}{2 \cdot R} (x^2 - a^2).$$

Тогда при внедрении параболического цилиндра в упругое слоистое покрытие (8) напряженное состояние в области контакта $[-a, a]$ описывается уравнением:

$$\sigma_z(x) = \frac{\langle E \rangle_P}{2 \cdot h \cdot R} (x^2 - a^2) \quad (32)$$

А при внедрении параболического цилиндра в упруго-пластическое структурно неоднородное композиционное покрытие (эффективная диаграмма Прандтля) (17) напряженное состояние в области контакта $[-a, a]$ описывается следующим уравнением:

$$\sigma_z(x) = \langle \sigma_z(x) \rangle = \begin{cases} \frac{\langle E \rangle_X}{2 \cdot h \cdot R} (x^2 - a^2), & 0 \geq \frac{1}{2 \cdot h \cdot R} (x^2 - a^2) > \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X}, \\ \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_X}{2 \cdot h \cdot R} (x^2 - a^2) + \left(1 - \frac{\langle E_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \right) \langle \sigma_T^{сж} \rangle_X, & \frac{\langle \sigma_T^{сж} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \geq \frac{w(x, y, 0)}{h}. \end{cases} \quad (33)$$

Формулы (32) и (33) содержат в качестве параметра неопределенный до настоящего времени полуразмер области контакта a , который определяется одним и тем же уравнением (30) (Рис. 5):

$$P = - \int_{-a}^a \sigma_z(x) dx.$$

Осесимметричные контактные задачи. При решении осесимметричных контактных задач предполагается что $f(x, y) = f(r)|_{r=\sqrt{x^2+y^2}, r>0}$. Нагрузка P приложена вертикально вниз (Рис. 6). Исходя из (1), можно поставить следующее краевое условие по перемещениям на границе слоя:

$$w(r) = \begin{cases} f(r) + \delta, & r \in [0, a], \\ 0, & r \notin [0, a], \end{cases} \quad (34)$$

где a – радиус круга контакта, δ – глубина максимального внедрения штампа:

$$\delta = -f(a). \quad (35)$$

Уравнение равновесия (4) примет вид [1]:

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_z(r) \cdot r \cdot dr. \quad (36)$$

Очевидно, что ширина призматического стержня Δ существенно меньше, чем размер области контакта $\sqrt{2} \cdot \Delta \ll (b-a)$ (Рис. 1, 6).

Внедрение конуса. Пусть $f(r) = \text{tg}(\alpha) \cdot r$, где $\text{tg}(\alpha)$ – тангенс угла наклона образующей конуса к плоской поверхности покрытия:

$$\delta = -\text{tg}(\alpha) \cdot a. \quad (37)$$

Тогда перемещения в области контакта (28) определяются следующим способом на $[a, b]$:

$$w(x) = \text{tg}(\alpha) \cdot (r - a).$$

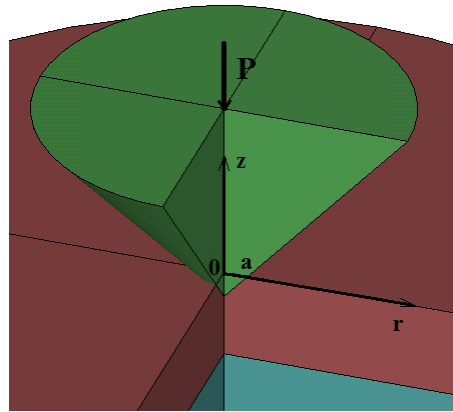


Рис. 6. Осесимметричная контактная задача

Напряженное состояние в области контакта при внедрении конуса в упругое слоистое покрытие определяется формулой (8):

$$\sigma_z(x) = \frac{\langle E \rangle_P}{h} \text{tg}(\alpha) \cdot (r - a). \quad (38)$$

При упруго-пластическом внедрении конуса (эффективная диаграмма Прандтля) в структурно неоднородное композиционное покрытие (17) напряженное состояние в области контакта будет определяться формулой:

$$\sigma_z(x) = \langle \sigma_z(x) \rangle = \begin{cases} \langle E \rangle_X \frac{\text{tg}(\alpha) \cdot (r - a)}{h}, & 0 \geq \frac{\text{tg}(\alpha) \cdot (r - a)}{h} > \frac{\langle \sigma_T^{c\text{жс}} \rangle_X}{\langle E \rangle_X}, \\ \langle E_T^{c\text{жс}} \rangle_X \frac{\text{tg}(\alpha) \cdot (r - a)}{h} + \left(1 - \frac{\langle E_T^{c\text{жс}} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \right) \langle \sigma_T^{c\text{жс}} \rangle_X, & \frac{\langle \sigma_T^{c\text{жс}} \rangle_X}{\langle E \rangle_X} \geq \frac{\text{tg}(\alpha) \cdot (r - a)}{h}. \end{cases} \quad (39)$$

Формулы (38) и (39) содержат в качестве параметра неопределенный радиус области контакта a , который определяется одним и тем же уравнением (36) (Рис. 6).

Выводы. В статье на примере решения контактных задач предлагается естественное обобщение модели основания Винклера, когда учтены многие возможные варианты уравнений состояния материала деформируемого покрытия. Кроме линейно упругой деформации элементов однослойного покрытия (5) впервые рассматриваются, линейно деформируемое горизонтально слоистое (7), линейно деформируемое композиционное структурно неоднородное покрытие (10), нелинейно деформируемое в соответствии с диаграммой Прандтля однослойное (11), слоистое (15) и композиционное структурно неоднородное (17) покрытия. Кроме того нелинейность деформирования покрытия моделируется степенной функцией и в этом случае также рассматривается деформирование однослойного нелинейного (19), многослойного нелинейного (25) и композиционного структурно неоднородного покрытия (27). Приведены примеры решения конкретных задач, для параболического цилиндра и конуса.

Процесс разгрузки при решении контактных задач не рассматривается.

Список использованных источников

1. Солдатенков И.А. Решение контактной задачи для композиции полуса – полуплоскость при наличии изнашивания с изменяющейся областью контакта // Изв. РАН. Сер. Механика твердого тела. 1998. № 2. С. 78-88.
2. Пелех Б.Л., Сысак Р.Д. О давлении твердого тела на трансверсально изотропную пластинку, связанную с упругим основанием // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1970. Т. 23. № 3. С. 36-42.
3. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН. 2005. Вып. 1. С. 147-160.
4. Михеев А.В. Исследование локальной устойчивости пологих ортотропных оболочек на упругом основании // Вестн. СПб ун-та. Сер. Матем., механ., астрон. 2007. Вып. 2. С. 128-133.
5. Михеев А.В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих ортотропных оболочек на упругом основании // Вестн. СПб ун-та. Сер. Матем., механ., астрон. 2007. Вып. 3. С. 137-143.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М., 1989. 510 с.
7. Kravchuk A., Rymuza Z., Jarzabek D. Penetration of a pyramid indenter into a multilayer coating // Int. J. Mat. Res. (formerly Z. Metallkd.) 2009. V. 100. № 7. P. 933-935.
8. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin, 1928. S. 962.
9. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung // Z. Angew. Math. Und Mech. 1929. V 9. № 1. S. 49-58.
10. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13. № 4. P. 213-222.